

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA**

Alessandro Dal Pizzol

**UMA METODOLOGIA UNIFICADA EMPREGANDO O MÉTODO DOS  
VOLUMES FINITOS PARA A SOLUÇÃO ACOPLADA DO ESCOAMENTO E  
DA GEOMECÂNICA EM MEIOS POROSOS**

Florianópolis

2014



Alessandro Dal Pizzol

**UMA METODOLOGIA UNIFICADA EMPREGANDO O MÉTODO DOS  
VOLUMES FINITOS PARA A SOLUÇÃO ACOPLADA DO ESCOAMENTO E  
DA GEOMECÂNICA EM MEIOS POROSOS**

Dissertação submetida ao Programa de  
Pós-Graduação em Engenharia Mecânica  
para a obtenção do grau de Mestre em  
Engenharia Mecânica.

Orientador: Clovis Raimundo Maliska

Florianópolis

2014

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor, através do  
Programa de Geração Automática da Biblioteca Universitária da UFSC.

Pizzol, Alessandro Dal

Uma metodologia unificada empregando o método dos volumes finitos para a solução acoplada do escoamento e da geomecânica em meios porosos / Alessandro Dal Pizzol ; orientador, Clovis R. Maliska - Florianópolis, SC, 2014. 171 p.

Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Santa Catarina, Centro Tecnológico. Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica.

Inclui referências

1. Engenharia Mecânica. 2. Engenharia de reservatório. 3. Acoplamento reservatório/geomecânica. 4. Solução unificada. 5. Método dos volumes finitos. I. Maliska, Clovis R.. II. Universidade Federal de Santa Catarina. Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica. III. Título.



Alessandro Dal Pizzol

**UMA METODOLOGIA UNIFICADA EMPREGANDO O MÉTODO DOS  
VOLUMES FINITOS PARA A SOLUÇÃO ACOPLADA DO ESCOAMENTO E  
DA GEOMECÂNICA EM MEIOS POROSOS**

Esta dissertação foi julgada adequada para a obtenção do título de “Mestre em Engenharia Mecânica”, e aprovada em sua forma final pelo Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica.

Florianópolis, 21 de Fevereiro 2014.

---

Armando Albertazzi Gonçalves Jr., Dr.Eng., Coordenador do Curso

---

Clovis Raimundo Maliska, Ph.D., Orientador

**BANCA EXAMINADORA**

---

Antônio Fábio Carvalho da Silva, Dr.Eng., Presidente

---

Celso Peres Fernandes, Dr.Eng.

---

Marcelo Krajnc Alves, Ph.D.



# AGRADECIMENTOS

Ao professor Clovis R. Maliska, pelo imenso apoio desde o início do mestrado, pelos incentivos e recomendações que me encorajaram a ingressar neste curso. Pela excelente orientação prestada, por sempre estar disposto a discutir sobre o assunto, passando sempre seus vastos conhecimentos de maneira muito clara e eficiente.

Ao professor Fábio, pela disposição, atenção e pelas vezes que esclareceu minhas dúvidas, fazendo eu avançar no meu trabalho.

A todos os integrantes do SINMEC, por sempre estarem dispostos a ajudar e contribuir com seus conhecimentos, e principalmente pela amizade e companheirismo compartilhados nos dois anos de SINMEC. Em especial à Tati que foi sempre muito prestativa, buscando sempre ajudar e manter o laboratório como um bom ambiente de trabalho.

Ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica (POSMEC), pela excelente estrutura, organização e nível técnico, pilares que o colocam entre os melhores do Brasil. Ao corpo docente, pela excelente qualidade das aulas ministradas e pela preocupação com o aprendizado dos alunos.

À Agência Nacional do Petróleo, pela concessão da bolsa de estudos que viabilizou o desenvolvimento desta pesquisa.

Aos colegas de mestrado, pelo ótimo convívio durante a realização das disciplinas. Em especial aos grandes companheiros Rafael, Hartmann, Chico, Leandro e Marco, pelo apoio, motivação e pelos excelentes momentos de descontração.

Ao meu “irmão” Gio, pelo excelente convívio, por toda ajuda, incentivo, companheirismo e por fazer acreditar que conseguiríamos alcançar este sonho.

À minha maravilhosa família, meus pais, irmãos, cunhados, sobrinhos, que sempre me apoiaram e deram força para que eu acreditasse que este sonho seria possível. À minha noiva Mariane, pela intenso incentivo, pelas inúmeras conversas, as quais sempre me motivaram e fortaleceram, e principalmente por ser compreensível em inúmeros finais de semanas,

que abrimos mão do nosso lazer para eu ficar escrevendo a minha dissertação.

A Deus e Nossa Senhora Aparecida por darem saúde, força e energia para eu concluir este marcante trabalho em minha vida.

# SUMÁRIO

<b>Lista de Figuras</b>	<b>v</b>
<b>Lista de Tabelas</b>	<b>xi</b>
<b>Lista de Símbolos</b>	<b>xiii</b>
<b>Resumo</b>	<b>xvii</b>
<b>Abstract</b>	<b>xix</b>
<b>1 Introdução</b>	<b>1</b>
1.1 Preliminares . . . . .	1
1.2 Objetivos e contribuições . . . . .	6
1.3 Organização do trabalho . . . . .	8
<b>2 Teoria da Poroelasticidade</b>	<b>11</b>
2.1 Teoria da consolidação de Biot . . . . .	12
2.1.1 Equações de equilíbrio de forças . . . . .	12
2.1.2 Equação da continuidade para o fluido . . . . .	16
2.1.3 Equações governantes . . . . .	17
2.1.4 Interpretação física das constantes de Biot . . . . .	17
2.1.5 Comentários . . . . .	19
2.2 Formulação Micromecânica . . . . .	20
2.2.1 Respostas volumétricas drenada e não drenada . . . . .	21
2.2.2 Resposta volumétrica de um meio poroelástico . . . . .	22
2.2.3 Resposta volumétrica de um meio poroelástico ideal . . . . .	24
2.2.4 Definição das compressibilidades . . . . .	25
<b>3 Formulação Matemática</b>	<b>27</b>
3.1 Modelo geomecânico . . . . .	27
3.2 Modelo de reservatório . . . . .	30

3.3	Comentários	42
<b>4</b>	<b>Acoplamento Reservatório/Geomecânica</b>	<b>45</b>
4.1	Parâmetros de acoplamento	46
4.2	Métodos de acoplamento	47
4.2.1	Pseudo-acoplamento	47
4.2.2	Acoplamento explícito	48
4.2.3	Acoplamento iterativo	49
4.2.4	Totalmente acoplado	51
<b>5</b>	<b>Formulação Numérica</b>	<b>53</b>
5.1	Arranjo das variáveis na malha	54
5.2	Discretização das equações governantes	55
5.2.1	Modelo de reservatório	56
5.2.2	Modelo geomecânico	58
5.2.2.1	Forma conservativa	59
5.2.2.2	Forma não-conservativa	65
5.3	Implementação das condições de contorno	68
5.3.1	Modelo de reservatório	69
5.3.2	Modelo geomecânico	70
5.4	Montagem dos sistemas lineares de equações	74
5.5	Cálculo das deformações e tensões	76
5.6	Algoritmo de solução	77
5.7	Critério de convergência	78
<b>6</b>	<b>Resultados e Discussões</b>	<b>79</b>
6.1	Casos unidimensionais	80
6.1.1	Problema de Terzaghi	80
6.1.2	Coluna poroelástica composta por dois materiais.	87
6.2	Caso bidimensional - Problema de Mandel	94
6.3	Simulação acoplada fluxo/geomecânica em um reservatório contendo um poço produtor e um injetor	110
<b>7</b>	<b>Conclusões</b>	<b>123</b>
	<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>127</b>
<b>A</b>	<b>Correlações das constantes poroelásticas</b>	<b>131</b>
A.1	Constantes poroelásticas para um sistema fluido/ estrutura	131

A.2	Constantes poroelásticas definidas na abordagem micromecânica . . . . .	132
A.3	Casos particulares . . . . .	133
<b>B</b>	<b>Dedução dos coeficientes da equação governante para escoamento monofásico</b>	<b>135</b>
<b>C</b>	<b>Soluções analíticas</b>	<b>139</b>
C.1	Problema de Terzaghi . . . . .	139
C.2	Problema da coluna poroelástica com dois materiais. . . . .	140
C.3	Problema de Mandel . . . . .	141





# LISTA DE FIGURAS

Figura 1.1	Representação esquemática da rocha reservatório, retirada de [7]. . . . .	2
Figura 1.2	Interação entre sólido e fluido durante a produção de petróleo. . . . .	3
Figura 2.1	Tensor tensão atuante no volume infinitesimal de meio poroso. . . . .	13
Figura 2.2	Volume de controle para teste drenado. . . . .	21
Figura 2.3	Volume de controle para teste não drenado. . . . .	22
Figura 3.1	Volume de controle para o balanço de massa. . . . .	32
Figura 3.2	Velocidades envolvidas no escoamento em um meio poroso não deformável. . . . .	33
Figura 3.3	Velocidades envolvidas no escoamento em um meio poroso deformável. . . . .	34
Figura 4.1	Esquema representando a interação da geomecânica com o escoamento de fluido em um reservatório deformável. . . . .	46
Figura 4.2	Fluxograma do acoplamento explícito. . . . .	49
Figura 4.3	Fluxograma do acoplamento iterativo. . . . .	50
Figura 5.1	Arranjo de variáveis desencontrado. . . . .	54
Figura 5.2	Volume de controle $P$ para a variável pressão e seus vizinhos. . . . .	56
Figura 5.3	(a) Volume de controle $P$ para a variável $u$ e seus vizinhos. (b) Posição das variáveis conectas a $u_P$ . . . . .	59

Figura 5.4	(a) Volume de controle $P$ para a variável $v$ e seus vizinhos. (b) Posição das variáveis conectas a $v_P$ . . . . .	63
Figura 5.5	Volume de controle adjacente à fronteira. (a) Pressão prescrita. (b) Fluxo prescrito. . . . .	70
Figura 5.6	Meio volume de controle adjacente à fronteira. (a) Deslocamento prescrito. (b) Tensão normal prescrita. . . . .	71
Figura 5.7	Volume de controle adjacente à fronteira para condição de contorno de tensão cisalhante prescrita. . . . .	73
Figura 6.1	Coluna com as condições de contorno. (a) Para o momento de aplicação da carga, instante inicial $t = 0$ (condição não drenada). (b) Restante do tempo (condição drenada). . . . .	81
Figura 6.2	Campos de pressão obtidos para três tempos, (a) 1, (b) 50 e (c) 100 segundos. . . . .	83
Figura 6.3	Campos de deslocamento vertical obtidos para três tempos, (a) Inicial, (b) 50 e (c) 500 segundos. . . . .	85
Figura 6.4	Comparação entre os resultados numéricos e as soluções analíticas. (a) Pressão na base da coluna. (b) Deslocamento vertical no topo da coluna. . . . .	85
Figura 6.5	Comparação entre os resultados numéricos e analíticos da pressão ao longo do espaço. . . . .	86
Figura 6.6	Variação temporal das tensões atuantes na base da coluna. . . . .	87
Figura 6.7	Coluna composta por dois materiais diferentes. . . . .	88
Figura 6.8	Pressão numérica versus analítica para $R_k = 100$ . . . . .	89
Figura 6.9	Pressão numérica versus analítica para $R_k = 10$ . . . . .	90
Figura 6.10	Pressão numérica versus analítica para $R_k = 0.1$ . . . . .	90
Figura 6.11	Solução numérica do deslocamento vertical para $R_k = 0.1$ . . . . .	91
Figura 6.12	Solução numérica da pressão para meios com diferentes compressibilidades. . . . .	93
Figura 6.13	Solução numérica do deslocamento vertical para meios com diferentes compressibilidades. . . . .	94

Figura 6.14	Problema de Mandel destacando o domínio de solução usado na simulação numérica com as respectivas condições de contorno. ....	95
Figura 6.15	Esquema usado na implementação das condições de contorno na fronteira superior do domínio. ....	98
Figura 6.16	Campos de tensão total vertical obtidos nos tempos, (a) 100, (b) 1000, (c) 5000, (d) 25000 e (e) 100000 segundos....	99
Figura 6.17	Campos de pressão obtidos nos tempos, (a) 100, (b) 3200 e (c) 25000 segundos, contemplando as linhas de fluxo para 3200 segundos. ....	100
Figura 6.18	Campos de deslocamento vertical obtidos nos tempos, (a) 100, (b) 3200 e (c) 100000 segundos. ....	100
Figura 6.19	Comparação entre os resultados numérico e analítico. (a) Pressão em $x = 0$ (b) Tensão total vertical em $x = 0$ . ....	101
Figura 6.20	Comparação entre os resultados numérico e analítico. (a) Deslocamento vertical em $y = H$ (b) Deslocamento horizontal em $x = L$ . ....	102
Figura 6.21	Comparação entre os resultados numéricos e analíticos da pressão ao longo do eixo $x$ para diferentes tempos. ....	103
Figura 6.22	Comparação entre os resultados numéricos e analíticos da tensão total normal ao longo do eixo $x$ para diferentes tempos. ....	103
Figura 6.23	Comparação entre os resultados numéricos e analíticos do deslocamento horizontal ao longo do eixo $x$ para diferentes tempos. ....	104
Figura 6.24	Comparação entre os resultados numéricos e analíticos do deslocamento vertical ao longo do eixo $y$ para diferentes tempos. ....	104
Figura 6.25	Pressão em função do tempo calculada em $x = 0.625$ e $y = 0.2$ m. (centro do VC inferior esquerdo da malha mais grosseira). ....	105
Figura 6.26	Pressão em função de $x$ calculada em $y = 0.2$ m nos tempos 3200 e 10000 segundos. ....	106

Figura 6.27	Variação temporal da porosidade nas posições $x = 0$ e $x = L$ .....	107
Figura 6.28	Variação temporal da tensão efetiva vertical nas posições $x = 0$ e $x = L$ .....	107
Figura 6.29	Influência da permeabilidade absoluta no efeito de Mandel-Cryer.....	108
Figura 6.30	Influência do coeficiente de Poisson no efeito de Mandel-Cryer.....	109
Figura 6.31	Domínio de solução do problema, destacando o reservatório com seus dois poços, produtor (azul) e injetor (vermelho).....	110
Figura 6.32	Campos de pressão obtidos nos tempos, (a) 1, (b) 20 , (c) 100 e (d) 1250 dias.....	113
Figura 6.33	Pressão ao longo do eixo $x$ na posição $y = 320m$ em alguns instantes de tempo.....	113
Figura 6.34	Campos de tensão total vertical obtidos nos tempos, (a) 1, (b) 20 , (c) 100 e (d) 1250 dias.....	114
Figura 6.35	Tensão total vertical ao longo do eixo $x$ na posição $y = 320m$ em alguns instantes de tempo. ....	114
Figura 6.36	Campos de tensão efetiva vertical obtidos nos tempos, (a) 1, (b) 20 , (c) 100 e (d) 1250 dias.....	116
Figura 6.37	Tensão efetiva vertical ao longo do eixo $x$ na posição $y = 320m$ em alguns instantes de tempo. ....	116
Figura 6.38	Campos de tensão total horizontal obtidos nos tempos, (a) 1, (b) 20 , (c) 100 e (d) 1250 dias. ....	117
Figura 6.39	Tensão total horizontal ao longo do eixo $x$ na posição $y = 320m$ em alguns instantes de tempo. ....	117
Figura 6.40	Deslocamento vertical no topo da estrutura em alguns instantes de tempo.....	118
Figura 6.41	Deslocamento horizontal ao longo do eixo $x$ na posição $y = 320m$ em alguns instantes de tempo. ....	118

Figura 6.42 Campos de porosidade obtidos nos tempos, (a) 1, (b) 20 ,  
(c) 100 e (d) 1250 dias. .... 119

Figura 6.43 Campos de porosidade obtidos na simulação usando pro-  
priedades do arenito Boise, correspondentes aos tempos,  
(a) 1, (b) 20 , (c) 100 e (d) 1250 dias. .... 120



# LISTA DE TABELAS

Tabela 6.1	Dados de entrada utilizados na simulação do problema de Terzaghi.....	82
Tabela 6.2	Comparação entre os valores numéricos e analíticos. ....	84
Tabela 6.3	Dados de entrada para o caso onde os materiais apresentam permeabilidades diferentes.....	88
Tabela 6.4	Dados de entrada para o caso onde os materiais apresentam compressibilidades diferentes. ....	92
Tabela 6.5	Dados de entrada utilizados na simulação do problema de Mandel. ....	97
Tabela 6.6	Dados de entrada utilizados na simulação do reservatório.111	
Tabela 6.7	Propriedades da rocha arenito Boise, retiradas de [14].....	120





# LISTA DE SÍMBOLOS

## Símbolos Latinos

$B$	Coeficiente de Skempton
$c$	Constante de consolidação
$c_b$	Compressibilidade total
$c_f$	Compressibilidade do fluido
$c_p$	Compressibilidade dos poros
$c_s$	Compressibilidade da matriz sólida ou dos grãos sólidos
$\mathbb{D}$	Matriz constitutiva
$E$	Módulo de Young ou Módulo de elasticidade longitudinal
$\mathbf{g}$	Vetor aceleração da gravidade
$G$	Módulo de elasticidade transversal
$1/H$	Coeficiente de expansão poroelástico
$K_b$	Módulo de compressão volumétrica drenado
$K_f$	Módulo de compressão volumétrica do fluido
$K_p$	Módulo de compressão volumétrica do poro
$K_s$	Módulo de compressão volumétrica dos grãos sólidos
$K_b^u$	Módulo de compressão volumétrica não drenado
$K$	Permeabilidade absoluta
$\dot{m}$	Fluxo de massa
$\mathbf{m}$	Vetor unidimensional de elementos binários
$p$	Pressão do fluido
$\tilde{q}$	Vazão volumétrica por unidade de volume
$Q$	Módulo de Biot
$1/R$	Coeficiente de armazenamento específico sob tensão total constante

$R_k$	Razão de permeabilidades
$t$	Tempo
$\mathbf{u}$	Vetor deslocamento
$u, v, w$	Componentes do vetor deslocamento
$\mathbf{v}$	Vetor velocidade de Darcy
$\mathbf{v}'_s$	Vetor velocidade de Darcy da matriz sólida
$\mathbf{v}^c$	Vetor velocidade de Darcy composta
$\mathbf{v}_p$	Vetor velocidade de poros
$\bar{\mathbf{v}}_p$	Vetor velocidade de poros média
$\mathbf{v}_s$	Vetor velocidade da matriz sólida
$V_b$	Volume total do meio poroso <i>bulk volume</i>
$V_f$	Volume de fluido
$V_p$	Volume poroso
$V_s$	Volume da matriz sólida
$x, y, z$	Coordenadas cartesianas

## Símbolos Gregos

$\sigma$	Tensor tensão total
$\sigma'$	Tensor tensão efetiva
$\epsilon$	Tensor deformação total
$\sigma_{ij}$	Componentes do tensor tensão total
$\epsilon_{ij}$	Componentes do tensor deformação
$\bar{\sigma}$	Tensão total média
$\sigma$	Tensão total isotrópica
$\epsilon$	Deformação volumétrica
$\dot{\epsilon}$	Taxa de deformação volumétrica
$\nu$	Coefficiente de Poisson drenado
$\nu^u$	Coefficiente de Poisson não drenado
$\alpha$	Coefficiente de Biot
$\mu$	Viscosidade absoluta
$\zeta$	Incremento do volume de fluido

$\rho_f$	Densidade do fluido
$\rho_s$	Densidade dos grãos sólidos
$\rho$	Densidade total da rocha
$\lambda$	Constante de Lamé
$\Delta t$	Passo de tempo
$\phi$	Porosidade

## Subscritos

$e, w, n, s$  Referente às faces leste, oeste, norte e sul do volume de controle

## Sobrescritos

$n$	Nível de tempo atual
$o$	Nível de tempo anterior
$\theta$	Nível de tempo genérico
$k$	Nível iterativo no passo de tempo



# RESUMO

Este trabalho propõe aplicar o método dos volumes finitos na solução de problemas acoplados escoamento/geomecânica envolvidos em processos de recuperação de petróleo. A solução de tal acoplamento equivale a resolver um problema que descreve o estado de tensões atuante na matriz sólida do reservatório e outro descrevendo o escoamento do fluido através do meio poroso. Normalmente este acoplamento é resolvido aplicando diferentes métodos numéricos em cada problema, volumes finitos ou diferenças finitas para o escoamento no meio poroso e elementos finitos para o estado de tensões na matriz sólida. Neste contexto está inserido o principal desafio do presente trabalho, resolver ambos os problemas com o mesmo método numérico empregando uma mesma malha computacional. As grandes vantagens desta abordagem unificada aplicando o método dos volumes finitos são a dispensa de interpolação na malha dos parâmetros de acoplamento durante a troca de informações de um problema para outro na solução iterativa e, ainda mais relevante, a garantia que as equações aproximadas de ambos os problemas são conservativas. Quanto à formulação matemática, o comportamento mecânico do meio poroso é modelado pela teoria da poroelasticidade de Biot e pelo princípio das tensões efetivas, enquanto o escoamento é regido pela lei de Darcy. É considerado um meio poroso formado por grãos sólidos deformáveis que está preenchido por um fluido pouco compressível. As soluções numéricas são obtidas para um domínio bidimensional, o qual o equilíbrio de tensões é definido para um estado plano de deformações. A validação numérica da metodologia proposta é largamente executada através da comparação de soluções numéricas com analíticas de três problemas testes, onde é constatada a eficiência e as vantagens desta metodologia. As soluções dos problemas propostos mostram que a ferramenta aqui desenvolvida é capaz de prever o comportamento das principais variáveis envolvidas em uma análise geomecânica de um reservatório. O desenvolvimento aqui apresentado oferece uma interessante alternativa para resolver problemas acoplados em uma abordagem unificada.



# ABSTRACT

The purpose of this work is to apply the finite volume method to solve coupled flow/geomechanics problems involved in oil recovery processes. The solution of such coupling is equivalent to solve a problem which describes the stress field on the reservoir solid matrix and another describing the fluid flow through porous media. This coupled problem is normally solved using two different numerical methods on each problem, finite volume or finite difference for the flow in porous media and finite element for stress field in the solid matrix. In this context, the main challenge of this work is to solve both problems with the same numerical method employing the same computational mesh. The great advantages of this unified approach applying the finite volume method are the no requirement grid interpolation of the coupling parameters for the exchange of information from one problem to another in the iterative solution and, even more significantly, the guarantee that the approximate equations of both problems are conservative. As for the mathematical formulation, the mechanical behavior of the rock is modeled using the Biot's poroelasticity theory and the principle of effective stress, while the flow is modeled by Darcy's law. It is considered a porous media formed by deformable solid grains filled by slightly compressible fluid. The numerical solutions are obtained for two-dimensional domains for a plane strain condition. The numerical validation of the proposed methodology is largely performed by comparing numerical solutions with analytical of three test problems, where the efficiency and advantages of this methodology are proven. The solutions of the proposed problems show that the developed tool is able to predict the behavior of the main variables involved in geomechanics analysis of reservoir. The unified numerical approach presented herein is an encouraging alternative for solving coupled problems of engineering interest.





# INTRODUÇÃO

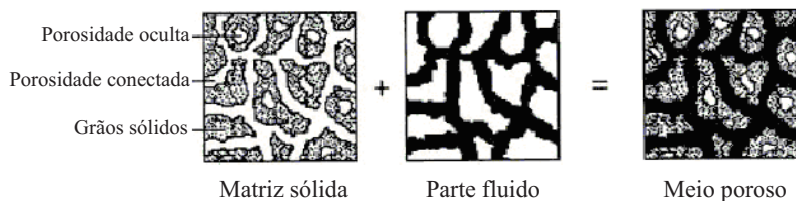
## 1.1 Preliminares

A engenharia de reservatórios de petróleo é uma engenharia multidisciplinar, pois é alimentada por teorias vindas das mais diversas áreas da ciência, dentre elas, destacam-se a geologia, mecânica dos fluidos, termodinâmica e a geomecânica. Dada a importância do petróleo na matriz energética mundial, a busca por novas descobertas de campos e o desenvolvimento de novas tecnologias para maximizar os volumes de óleo recuperável impulsionaram as pesquisas nas três primeiras áreas citadas anteriormente, enquanto a geomecânica ficou por décadas sendo negligenciada ou dada pouca importância. Porém com o desenvolvimento da produção dos campos, começaram a aparecer sérios problemas para as companhias petrolíferas, tais como: perda de poços por colapso e cisalhamento de revestimentos, subsidência no leito marinho causada pela compactação do reservatório acarretando sérios danos em plataformas e equipamentos de elevação, alagamentos em regiões costeiras devido à subsidência, ativação de falhas geológica prejudicando irreversivelmente planos de drenagem de reservatórios, exsudações de petróleo no leito marinho, produção de areia, etc. Assim, defrontou-se com a real necessidade em expandir pesquisas na área da geomecânica buscando obter formas de prever estes efeitos indesejados e encontrar maneiras seguras de serem evitados.

No início dos estudos, os engenheiros estavam mais preocupados com

os efeitos causados pela subsidência. Assim, para modelar tal fenômeno físico basearam-se na teoria da consolidação de solos proposta por Terzaghi [30]. Esta teoria descreve a compactação do solo saturado com fluido causada pela redução de pressão do fluido contido em seu interior. Fisicamente, no reservatório de petróleo ocorre o mesmo fenômeno, pois a extração de gás, óleo e água do reservatório causa a redução de pressão e consequente deformação da rocha, resultando na compactação do reservatório e subsidência na superfície. Com isso, a teoria da consolidação serviu de base para os primeiros estudos geomecânicos em reservatórios. Ao longo dos anos, outros autores Biot [3], Geerstma [16], Rice e Cleary [26], foram reformulando e expandindo esta teoria até chegarem na teoria da poroelasticidade, a qual atualmente é a base matemática empregada nos estudos de problemas acoplados reservatório/geomecânica realizados na indústria do petróleo [24].

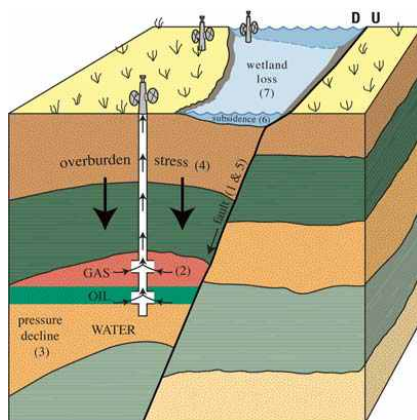
A rocha reservatório onde está armazenado o petróleo é composta por duas partes: a matriz sólida, formada pelos grãos sólidos e cimento, e os poros, os quais estão preenchidos por fluido, conforme ilustrado na Figura 1.1. Esta mesma figura pode ser útil para o entendimento das tensões atuantes na rocha, as quais se relacionam segundo o princípio das tensões efetivas de Terzaghi [30]. Este princípio define que a tensão total atuante na rocha ou meio poroso é dada pela soma da tensão efetiva e a pressão do poro, denominada poropressão, onde a tensão efetiva é a tensão que age exclusivamente na matriz sólida da rocha. Assim, quando aplicada uma carga sobre um meio poroso, parte desta carga é suportada pelo fluido e parte pela matriz sólida, onde a distribuição de carga entre as partes dependerá das propriedades físicas do fluido e do sólido.



**Figura 1.1** – Representação esquemática da rocha reservatório, retirada de [7].

Conhecendo o princípio das tensões efetivas e com o auxílio da Figura

1.2, a física envolvida no acoplamento fluido/estrutura que ocorre durante a produção de um reservatório torna-se facilmente compreendida. Antes da produção, o reservatório está em equilíbrio dinâmico e de tensões, onde o peso das rochas sobrepostas ao reservatório está sendo suportado parcialmente pela matriz sólida e pelo fluido pressurizado existente nos poros. Com o início da produção, ocorre a redução de pressão do fluido, e parte do carregamento é transferido para a matriz sólida, causando o aumento da tensão efetiva e consequente compactação da rocha. Essa compactação reduz o espaço poroso da formação, e dependendo da magnitude da compactação, pode reduzir sua permeabilidade absoluta. Além disso, a compactação gerada no reservatório resulta na subsidência em superfície. Assim, a compactação é a resposta geomecânica da rocha devido à redução de pressão do fluido.



**Figura 1.2** – Interação entre sólido e fluido durante a produção de petróleo.

Dessa forma, observa-se que o fenômeno descrito acima trata-se de um problema multifísico, envolvendo o deslocamento de fluido pelo meio poroso e o estado de tensões atuante na rocha, caracterizando um problema poroelástico. Assim, como será apresentado em detalhes nos capítulos 2 e 3, a modelagem matemática aplicada para descrever tal fenômeno físico baseia-se na teoria da poroelasticidade [3], que envolve as equações da conservação da massa do fluido, lei de Darcy e as equações de equilíbrio de tensões [36]. Ressaltando que estas equações são acopladas, pois a equação da conservação da massa do fluido possui um termo adicional

associado à deformação volumétrica do meio, e as equações de equilíbrio de tensões apresentam um termo auxiliar que incorpora o efeito da pressão do fluido no estado de tensões do meio poroso.

Dada a complexidade do acoplamento fluido/geomecânica e as dificuldades adicionais atreladas ao problema, tais como: heterogeneidades e anisotropias do meio poroso, geometrias irregulares dos domínios etc, a solução de tal fenômeno somente é possível aplicando as técnicas da simulação numérica. Na engenharia de reservatórios, a simulação numérica é a principal ferramenta usada pelos engenheiros para prever os fenômenos físicos e balizar suas tomadas de decisões. Por trás da simulação numérica, estão os métodos numéricos, que são os responsáveis por transformar o conjunto de equações diferenciais que descrevem o fenômeno físico em um conjunto de equações algébricas capaz de ser facilmente resolvido numericamente.

Em geral, a aplicação de métodos numéricos para resolver equações diferenciais requer a discretização do domínio de solução, processo que consiste na divisão em um número finito de blocos ou subdomínios, os quais formam a denominada malha computacional. Esta malha determina a localização de um conjunto de pontos no domínio, nos quais valores aproximados das variáveis das equações diferenciais são determinados por meio do método numérico.

Entre os principais métodos numéricos aplicados nos problemas de engenharia, destacam-se o método dos elementos finitos (MEF), o método das diferenças finitas (MDF) e o método dos volumes finitos (MVF). O MDF, já bastante em desuso, e o MVF são, em geral, aplicados na solução de problemas de mecânica dos fluidos e transferência de calor, enquanto o MEF, no caso da poroelasticidade, é aplicado para o problema estrutural da rocha. Neste ponto, cabe fazer um questionamento, e para o problema acoplado fluido/geomecânica, qual método numérico deveria ser empregado, pois neste problema estão associadas duas diferentes físicas, mecânica dos fluidos e mecânica dos sólidos, as quais são historicamente resolvidas por métodos numéricos diferentes. A estratégia adotada pelos principais simuladores comerciais de reservatório que possuem o módulo geomecânico, como o STARS e o GEM da *Computer Modelling Group* (CMG) e o ECLIPSE da *Schlumberger* é resolver as equações do fluxo e da geomecânica separadamente, de tal forma que o modelo de fluxo é resolvido pelo MDF ou MVF e as equações do modelo geomecânico pelo

MEF. Para isso, os simuladores adotam estratégias de acoplamento para comunicar as soluções dos dois modelos. Diferentes estratégias ou métodos de acoplamento <sup>1</sup> estão implementados nestes simuladores, onde de uma forma resumida, seguem o seguinte fluxo de solução: inicialmente resolve-se o modelo de fluxo obtendo o campo de pressões, repassa-o para o modelo geomecânico, onde serão calculados os deslocamentos, deformações e tensões atuantes na rocha. No retorno ao modelo de fluxo, a resposta geomecânica da deformação do meio poroso é computada através da atualização da porosidade e da permeabilidade. Na sequência, os novos valores de porosidade e permeabilidade serão considerados na próxima solução do modelo de fluxo. A forma de fazer a troca de informações entre os modelos depende do método de acoplamento empregado no simulador.

Assim, observa-se que nesta estratégia são realizadas duas discretizações do domínio, uma para o fluido e outra para o sólido, onde métodos numéricos com diferentes características estão sendo aplicadas no mesmo problema físico. Isso certamente dificulta a representatividade física do acoplamento e não garante a conservação das propriedades físicas na solução. Também aumenta consideravelmente o número de interpolações das variáveis na troca de informações entre os modelos devido às duas diferentes discretizações. Além disso, impossibilita a solução do problema de forma totalmente acoplada, onde as equações são resolvidas simultaneamente.

Neste contexto é onde se encaixa o principal interesse do presente trabalho, resolver numericamente o problema acoplado fluido/geomecânica aplicando o mesmo método numérico em ambas as equações dos modelos de fluxo e geomecânico adotando uma mesma malha computacional. Essa metodologia visa respeitar fielmente o acoplamento e garantir estabilidade e acurácia a solução numérica. Para tal tarefa, busca-se aplicar um método numérico que garanta a conservação das propriedades físicas em nível discreto, pois este requisito é extremamente importante para a convergência da solução do acoplamento. Desta forma, nada mais indicado do que utilizar o método dos volumes finitos, visto que, a garantia da conservação das grandezas físicas em nível discreto é uma característica intrínseca desta formulação [21]. No desenvolvimento desta metodologia, o maior desafio será empregar a formulação do MVF nas equações de equilíbrio de forças da geomecânica, visto que estas são historicamente

---

<sup>1</sup> Os métodos de acoplamentos serão vistos em detalhe no capítulo 4.

resolvidas pelo MEF e há pouco relatos desta aplicação na literatura. Já o uso do MVF no modelo de fluxo é extremamente difundido, pois é o principal método numérico usado nesta aplicação.

## 1.2 Objetivos e contribuições

A presente dissertação tem como objetivo principal desenvolver e validar uma metodologia numérica para resolver problemas acoplados fluido/geomecânica empregando o método dos volumes finitos. Nesta metodologia ambas as equações dos modelos de fluxo e geomecânico serão discretizadas com o MVF em uma mesma malha computacional. A malha computacional adotada será cartesiana com arranjo desencontrado das variáveis. Serão considerados apenas domínios bidimensionais de solução, embora a metodologia conceitual seja a mesma para o uso em problemas tridimensionais.

Um dos principais desafios desta pesquisa está em resolver o modelo geomecânico com a discretização do MVF e mostrar que o método numérico é capaz de resolver este problema acoplado. Todo o desenvolvimento da formulação numérica com a integração das equações do modelo geomecânico e o tratamento das condições de contorno será apresentado em detalhes neste trabalho. Além disso, será discutida a forma adequada de integrar as equações de equilíbrio de tensões com o MVF, mostrando as diferenças em integrá-las nas formas conservativa e não-conservativa.

O modelo constitutivo aplicado na modelagem geomecânica da rocha será o elástico linear, enquanto o modelo do escoamento será o monofásico isotérmico, modelo este simplificado devido não estar no escopo desta pesquisa analisar modelos de fluxo complexos, e sim avaliar o desempenho do método numérico na solução do acoplamento fluido/geomecânica. O método de acoplamento empregado nas simulações será o acoplamento iterativo, onde as equações do modelo de fluxo e geomecânico são resolvidas separadamente em cada nível tempo, sendo iteradas  $n$  vezes no mesmo nível de tempo até alcançar a convergência requerida. Dependendo da tolerância estipulada, este acoplamento torna-se tão rigoroso quanto a solução totalmente acoplada. A pressão do fluido, a deformação volumétrica e a porosidade serão os parâmetros de acoplamento considerados na solução numérica.

A validação numérica da metodologia proposta será realizada buscando comprovar a eficiência do MVF na solução do acoplamento. Para isso, serão resolvidos problemas testes encontrados na literatura que apresentem solução analítica. O primeiro deles será um problema clássico de poroelasticidade elaborado e resolvido por Terzaghi [30], conhecido como problema de Terzaghi. Na sequência, será proposto um problema similar ao de Terzaghi quanto a geometria e as condições de contorno, porém com a diferença do domínio de solução deste ser formado por duas rochas com diferentes propriedades físicas. Isso possibilitará avaliar a acurácia da solução numérica nas regiões próximas à interface das duas rochas quando são aplicadas propriedades físicas bastante distintas entre os dois meios. O terceiro exemplo a ser resolvido trata-se de um *benchmark* usado na validação numérica de códigos computacionais implementados para solucionar problemas acoplados fluido/geomecânica. Conhecido como problema de Mandel [22], este apresenta um comportamento não monotônico da pressão capaz de ser detectado apenas se o método de acoplamento da solução numérica estiver fielmente representando a interação entre o fluido e a geomecânica. Assim, este problema torna-se excelente para analisar a robustez da solução do acoplamento. Salientando que na apresentação dos resultados dos três primeiros casos, além da validação numérica, serão também discutidos os fenômenos físicos atrelados a tais problemas. Após a validação numérica, será simulado um último caso que visa demonstrar a abrangência e potencialidade da modelagem aqui desenvolvida. O problema será composto por um reservatório contendo dois poços, um produtor e outro injetor, o qual está circundado por rochas não-reservatório, ou seja, o domínio de solução também contempla as rochas adjacentes ao reservatório. Assim, com esta configuração, será capaz de analisar os efeitos da produção do reservatório na variação do estado de tensões nas rochas adjacentes. Além disso, resultados da compactação do reservatório e consequente subsidência na superfície, deslocamentos e deformações da rocha reservatório, variação da porosidade ao longo da tempo, entre outras importantes informações da análise geomecânica também serão apresentadas e discutidas.

Os resultados serão obtidos mediante um código computacional implementado em linguagem de programação C++.

## 1.3 Organização do trabalho

O capítulo 2 traz uma revisão bibliográfica da evolução da teoria da poroelasticidade, apresentando os conceitos básicos e definindo as principais propriedades físicas poroelásticas. Abordando desde a teoria da consolidação de Biot [3], teoria base dos problemas acoplados fluido/estrutura, até alcançar a formulação micromecânica [14]. Ao longo do capítulo, definições de propriedades físicas e ensaios para obtenção destas são introduzidos. Assim, este capítulo busca familiarizar o leitor com os termos e propriedades físicas envolvidos no problema do acoplamento fluido/estrutura.

O capítulo 3 descreve de forma detalhada a formulação matemática dos modelos geomecânico e de fluxo no reservatório, os quais serão resolvidos numericamente com a metodologia numérica aqui desenvolvida. Neste, é realizado um interessante paralelo das velocidades do fluido e do sólido envolvidas na modelagem de um meio poroso deformável e não deformável, objetivando definir fisicamente o que cada velocidade significa, e apontar os termos adicionais da equação da conservação da massa do fluido definida para o meio poroso deformável. Além disso, a equação da atualização da porosidade é deduzida passo a passo.

No capítulo 4 são discutidos os métodos e estratégias encontrados na literatura para a solução numérica de problemas acoplado fluxo/geomecânica. Como são classificados, fluxogramas de solução, prós e contras de cada método, e possíveis aplicações. Também são abordados os parâmetros físicos envolvidos na solução do acoplamento.

O capítulo 5 descreve toda a formulação numérica aplicando o método dos volumes finitos na discretização das equações diferenciais dos modelos geomecânico e de fluxo. Apresentando em detalhes a integração das equações, aplicação das condições de contorno, montagem dos sistemas lineares, algoritmo de solução do acoplamento e critérios de convergência empregados. Além disso, é discutida a forma adequada de integrar as equações do modelo geomecânico, mostrando a importância em integrá-las na forma conservativa e identificando os erros associados à integração não conservativa.

O capítulo 6 contempla os resultados obtidos com a formulação numérica. São resolvidos três problemas testes encontrados na literatura objetivando a validação numérica da formulação. Por último resolve-se um caso de aplicação prática, buscando apresentar a potencialidade da



metodologia aqui desenvolvida.

Por fim, o capítulo 7 conclui este trabalho com uma discussão geral da metodologia numérica apresentada e dos resultados finais obtidos.



## TEORIA DA POROELASTICIDADE

O objetivo deste capítulo é abordar os princípios da poroelasticidade, definindo conceitos básicos e propriedades físicas. Na primeira seção será apresentada a teoria da consolidação de Biot [3], a qual foi originalmente formulada para descrever o fenômeno de sedimentação de solos. Como na modelagem de Biot o solo foi definido como um meio poroso saturado com um fluido, esta teoria tornou-se a principal base matemática para representar diferentes meios porosos em estudos envolvendo acoplamento fluido/estrutura. Em análises geomecânicas na engenharia de reservatórios, esta teoria é largamente aplicada, visto que a rocha reservatório possui comportamento similar ao do solo. Na seção seguinte, será discutida a abordagem micromecânica do meio poroso [14], o qual considera contribuições individuais dos constituintes sólido e fluido. Nesta abordagem são definidas novas constantes físicas com diferentes significados, os quais tornam-se mais fáceis de serem entendidas e empregadas. Por fim, serão apresentadas as correlações entre as propriedades poroelásticas que serão utilizadas na dedução das equações governantes deste trabalho.

A convenção de sinais adotada neste capítulo será a mesma adotada para todo o trabalho. Tensões de tração são consideradas positivas e de compressão negativas. A deformação volumétrica é definida positiva para expansão e negativa para contração. O incremento de fluido é positivo para fluido adicionado ao volume de controle e negativo para fluido retirado do volume de controle.

## 2.1 Teoria da consolidação de Biot

O mecanismo de consolidação de solos foi inicialmente explicado por Terzaghi [30] a partir de experimentos em laboratório, o qual analisou a sedimentação de uma coluna de solo exposta à uma carga constante e impedida de se deslocar lateralmente (estado unidimensional). Nesta pesquisa, Terzaghi introduziu os princípios das tensões efetivas. Após este trabalho, Biot [3] expandiu esta teoria para um caso tridimensional considerando carga variável com o tempo. Biot fez as seguintes considerações em seu modelo:

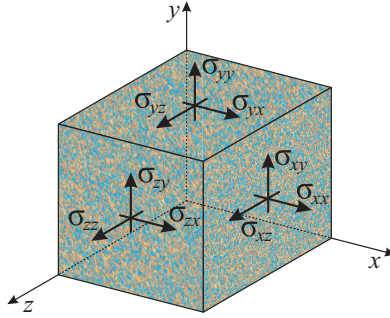
- Material isotrópico e homogêneo,
- Reversibilidade na relação tensão-deformação,
- Relação tensão-deformação linear,
- Condição de pequenas deformações,
- Líquido incompressível,
- O líquido escoar pelo meio poroso seguindo a lei de Darcy.

### 2.1.1 Equações de equilíbrio de forças

Considere um volume cúbico infinitesimal de meio poroso, conforme mostrado na Figura 2.1, sujeito à forças internas aplicadas em suas faces, onde estão sendo desconsideradas as forças de campo. Este volume é considerado grande o suficiente comparado com o tamanho dos poros, o qual possa ser assumido como um meio homogêneo, e ao mesmo tempo pequeno suficiente com a escala macroscópica do fenômeno. O tensor tensão que age no volume infinitesimal é definido por:

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{pmatrix} \quad (2.1)$$

o qual satisfaz a condição de equilíbrio de forças, dada por:



**Figura 2.1** – Tensor tensão atuante no volume infinitesimal de meio poroso.

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} &= 0 \\
 \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial z} &= 0 \\
 \frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} &= 0
 \end{aligned} \tag{2.2}$$

As tensões apresentadas em 2.2 são definidas como as tensões totais que agem no meio poroso.

Denotando por  $u$ ,  $v$  e  $w$  as componentes do vetor deslocamento do meio poroso nas direções  $x$ ,  $y$ , e  $z$ , respectivamente, as componentes do tensor deformação são definidas por:

$$\begin{aligned}
 \epsilon_{xx} &= \frac{\partial u}{\partial x} & \epsilon_{xy} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \\
 \epsilon_{yy} &= \frac{\partial v}{\partial y} & \epsilon_{xz} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \\
 \epsilon_{zz} &= \frac{\partial w}{\partial z} & \epsilon_{yz} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right)
 \end{aligned} \tag{2.3}$$

A partir das suposições definidas por Biot de material isotrópico linear, a relação tensão-deformação do meio poroso é expressa pela lei de Hooke da teoria da elasticidade com um termo adicional, que considera o efeito da pressão do fluido no interior do meio poroso. Como o material é isotrópico, a variação da pressão do fluido não causa deformações cisa-

lhantes, assim este termo é acrescentado apenas nas componentes normais da deformação [3].

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_{xx} &= \frac{\sigma_{xx}}{E} - \frac{\nu}{E} (\sigma_{yy} + \sigma_{zz}) + \frac{p}{3H} \\
 \varepsilon_{yy} &= \frac{\sigma_{yy}}{E} - \frac{\nu}{E} (\sigma_{xx} + \sigma_{zz}) + \frac{p}{3H} \\
 \varepsilon_{zz} &= \frac{\sigma_{zz}}{E} - \frac{\nu}{E} (\sigma_{yy} + \sigma_{xx}) + \frac{p}{3H} \\
 \varepsilon_{xy} &= \frac{\sigma_{xy}}{2G} \\
 \varepsilon_{xz} &= \frac{\sigma_{xz}}{2G} \\
 \varepsilon_{yz} &= \frac{\sigma_{yz}}{2G}
 \end{aligned} \tag{2.4}$$

onde  $p$  é a pressão do fluido ou poro-pressão. Em 2.4 as constantes  $E$ ,  $G$  e  $\nu$  são respectivamente, o módulo de Young, o módulo de elasticidade transversal e o coeficiente de Poisson, o qual estão relacionados por

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)} \tag{2.5}$$

Nota-se ainda em 2.4 a inclusão de uma nova constante física definida por  $1/H$ , a qual será discutida posteriormente.

Com o objetivo de descrever completamente a condição macroscópica do meio poroso, Biot introduziu uma nova grandeza escalar chamada por ele de *variation in water content*<sup>1</sup>, a qual é definida como o incremento de volume de água por unidade de volume do meio poroso [3]. Em outras palavras, esta grandeza é o volume de fluido retirado ou armazenado no volume de controle normalizado pelo volume do volume de controle. A entrada ou saída de fluido do volume de controle pode ser devido à deformação do meio poroso, a variação da pressão do fluido ou a presença de sumidouros ou fontes de geração [36]. A seguinte relação, que define esta nova grandeza é uma relação linear com as componentes normais do tensor tensão total e a pressão do fluido, é dada por

---

<sup>1</sup>Neste trabalho vamos adotar uma definição mais atual para esta variável, definida em [36] como incremento do volume de fluido, ao invés de variação do volume de água como foi definida por Biot.

$$\zeta = \frac{1}{3H} (\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz}) + \frac{p}{R} \quad (2.6)$$

onde  $1/R$  é uma constante física definida para balanceamento das equações de tensão e pressão. Esta equação também pode ser expressa em função da tensão total média,

$$\zeta = \frac{1}{H} \bar{\sigma} + \frac{p}{R} \quad (2.7)$$

em que a tensão total média é dada por

$$\bar{\sigma} = \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz}}{3} \quad (2.8)$$

A tensão total média é definida como um invariante de primeira ordem do estado de tensões, desta forma, o valor desta variável independe do plano de coordenadas em que as tensões normais estão atuando.

Assim, as equações 2.4 e 2.6 são as relações fundamentais que descrevem o estado de deformações do meio poroso sob condições de equilíbrio. Nota-se que são necessárias quatro constantes físicas  $G$ ,  $\nu$ ,  $1/H$  e  $1/R$  para definir estas relações para o meio poroso, ao contrário da elasticidade clássica a qual são necessárias apenas duas [36].

Resolvendo 2.4 em função das deformações, tem-se:

$$\begin{array}{rcl}
 \text{tensão total } (\sigma) & & \text{tensão efetiva } (\sigma') \quad \text{poro-pressão } (p) \\
 \underbrace{\sigma_{xx}} & = & \underbrace{2G \left( \varepsilon_{xx} + \frac{\nu \varepsilon}{1-2\nu} \right)} - \underbrace{\alpha p} \\
 \sigma_{yy} & = & 2G \left( \varepsilon_{yy} + \frac{\nu \varepsilon}{1-2\nu} \right) - \alpha p \\
 \sigma_{zz} & = & 2G \left( \varepsilon_{zz} + \frac{\nu \varepsilon}{1-2\nu} \right) - \alpha p \\
 \sigma_{xy} & = & 2G \varepsilon_{xy} \\
 \sigma_{xz} & = & 2G \varepsilon_{xz} \\
 \sigma_{yz} & = & 2G \varepsilon_{yz}
 \end{array} \quad (2.9)$$

o qual observa-se que o tensor tensão total é composto de duas parcelas: uma formada pelas tensões efetivas que atuam na matriz sólida e outra pela pressão hidrostática exercida pelo fluido que preenche os poros [3]. Assim em uma forma tensorial, a equação 2.9 pode ser escrita por

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}' - \alpha p \boldsymbol{\delta} \quad (2.10)$$

onde  $\boldsymbol{\delta}$  é o delta de Kronecker. Ainda em 2.9,  $\varepsilon$  é a deformação volumétrica formada pela soma das componentes normais do tensor deformação e  $\alpha$  é o coeficiente de Biot, definidos respectivamente por

$$\varepsilon = \varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz} \quad (2.11)$$

$$\alpha = \frac{2(1+\nu)G}{3(1-2\nu)H} \quad (2.12)$$

Substituindo 2.9 em 2.6, podemos escrever a equação do incremento de fluido em função da deformação volumétrica e da pressão,

$$\zeta = \alpha \varepsilon + \frac{p}{Q} \quad (2.13)$$

onde  $Q$  é o módulo de Biot ou inverso do fator de armazenamento, dado por

$$\frac{1}{Q} = \frac{1}{R} - \frac{\alpha}{H} \quad (2.14)$$

### 2.1.2 Equação da continuidade para o fluido

Para obter esta equação vamos considerar novamente um volume infinitesimal de meio poroso com as mesmas características aos da Figura 2.1, cujo o escoamento de fluido em seu interior é descrito pela lei de Darcy, dada por

$$\mathbf{v} = -\frac{1}{\mu} K \cdot \nabla p \quad (2.15)$$

onde  $\mathbf{v}$  é o vetor velocidade de Darcy,  $K$  é a permeabilidade absoluta e  $\mu$  a viscosidade<sup>2</sup>. Assumindo que o fluido é incompressível, tem-se que a taxa de variação do volume de fluido no volume de controle é igual a soma dos fluxos que atravessam as faces do mesmo, assim

---

<sup>2</sup>Biot [3] usou a constante  $k$  chamada de coeficiente de permeabilidade para representar a razão entre a permeabilidade absoluta e a viscosidade. Neste trabalho optou-se por manter a permeabilidade e a viscosidade explícitas na equação 2.15 para seguir a mesma notação em todo o texto.



$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = -\nabla \cdot \mathbf{v} \quad (2.16)$$

Substituindo 2.13 e 2.15 em 2.16, obtém-se

$$\frac{1}{Q} \frac{\partial p}{\partial t} - \frac{K}{\mu} \nabla^2 p = -\alpha \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} \quad (2.17)$$

a qual é a equação formulada por Biot [3] para representar o escoamento do fluido em um meio poroso deformável.

### 2.1.3 Equações governantes

As equações diferenciais que descrevem o fenômeno transiente da consolidação são obtidas substituindo as equações constitutivas das componentes de tensão total 2.9 nas equações de equilíbrio de forças 2.2. Com a adição da equação da continuidade do fluido 2.17, o sistema de equações está completo.

$$\begin{aligned} G \nabla^2 u + \frac{G}{1-2\nu} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} - \alpha \frac{\partial p}{\partial x} &= 0 \\ G \nabla^2 v + \frac{G}{1-2\nu} \frac{\partial \varepsilon}{\partial y} - \alpha \frac{\partial p}{\partial y} &= 0 \\ G \nabla^2 w + \frac{G}{1-2\nu} \frac{\partial \varepsilon}{\partial z} - \alpha \frac{\partial p}{\partial z} &= 0 \\ \frac{1}{Q} \frac{\partial p}{\partial t} - \frac{K}{\mu} \nabla^2 p &= -\alpha \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} \end{aligned} \quad (2.18)$$

Onde as quatro incógnitas são as componentes do vetor deslocamento  $u$ ,  $v$  e  $w$  e a pressão do fluido  $p$ .

### 2.1.4 Interpretação física das constantes de Biot

Para realizar a interpretação física das constantes de Biot vamos considerar uma amostra de meio poroso saturada com fluido, a qual está exposta a um carregamento isotrópico de tensões. Ou seja, as tensões totais normais aplicadas na amostra apresentam mesmo valor, assim  $\sigma_{xx} = \sigma_{yy} = \sigma_{zz} = \sigma$ . Com isso, as equações 2.4 e 2.7 que descrevem o estado de deformações do meio poroso podem ser reagrupadas na forma

$$\varepsilon = \frac{\delta V_b}{V_b} = \frac{1}{K_b} \sigma + \frac{1}{H} p \quad (2.19)$$

$$\zeta = \frac{1}{H} \sigma + \frac{1}{R} p \quad (2.20)$$

onde  $V_b$  é o volume total da amostra (*bulk volume*).

As constantes poroelásticas de Biot são obtidas a partir da resposta volumétrica da amostra quando esta é exposta a variações no estado de tensões ou na pressão do fluido. Assim, o significado físico das constantes das equações 2.19 e 2.20 é dado pela razão entre uma variável dependente e uma variável independente, enquanto a outra variável independente é mantida constante [36].

$$\left. \frac{\delta \varepsilon}{\delta \sigma} \right|_{\delta p=0} = \frac{1}{K_b} \quad (2.21)$$

$$\left. \frac{\delta \varepsilon}{\delta p} \right|_{\delta \sigma=0} = \left. \frac{\delta \zeta}{\delta \sigma} \right|_{\delta p=0} = \frac{1}{H} \quad (2.22)$$

$$\left. \frac{\delta \zeta}{\delta p} \right|_{\delta \sigma=0} = \frac{1}{R} \quad (2.23)$$

O coeficiente  $1/K_b$  é dado pela razão da variação da deformação volumétrica da amostra pela variação da tensão total aplicada, enquanto a pressão do fluido é mantida constante. Esta constante  $K_b$  é definida como o módulo de compressão volumétrica drenado. O coeficiente  $1/H$  é chamado de coeficiente de expansão poroelástico e descreve quanto o volume da amostra varia devido à variação da pressão, enquanto o estado de tensões aplicado mantém-se constante<sup>3</sup>. O coeficiente  $1/R$  é definido como o coeficiente de armazenamento específico sob condição de tensão total aplicada constante. Este é dado pelo volume de fluido armazenado na amostra normalizado pelo volume da amostra dividido pela variação de pressão do fluido a qual a amostra foi submetida. Na análise micromecânica será mostrado que a constante  $1/R$  é dada por uma relação entre as compressibilidades total, dos poros, do fluido e dos grãos sólidos. Assim, esta grandeza apresenta a mesma unidade de compressibilidade.

---

<sup>3</sup>Biot provou através de considerações de energia que ambas expressões de 2.22 são iguais a  $1/H$ .

Biot introduziu também outras duas constantes poroelásticas bastante utilizadas para caracterizar meios porosos.

$$\left. \frac{\delta \zeta}{\delta \varepsilon} \right|_{\delta p=0} = \alpha \quad (2.24)$$

$$\left. \frac{\delta \zeta}{\delta p} \right|_{\delta \varepsilon=0} = \frac{1}{Q} \quad (2.25)$$

A primeira delas é o coeficiente de Biot  $\alpha$ , o qual é definido por uma razão de deformações. Pois é dado pela razão entre o volume de fluido injetado ou retirado da amostra e a variação do volume total, enquanto a pressão do fluido é mantida constante. A equação 2.24 mostra que  $\alpha$  não pode ser maior do que 1, visto que o volume de fluido ganho ou perdido pela amostra não pode ser maior que a variação total do volume da amostra, assim  $\alpha$  varia entre 0 e 1. Do ponto de vista das rochas reservatório,  $\alpha = 1$  caracteriza as rochas que apresentam grãos sólidos incompressíveis, tais como arenitos inconsolidados e friáveis, e  $\alpha = 0$  representa rochas sem nenhuma porosidade, tais como as rochas salinas. Já o coeficiente  $1/Q$  é chamado de coeficiente de armazenamento específico sob condição de deformação volumétrica constante. Este mede a quantidade de fluido (por unidade de volume) que pode ser injetado em uma amostra para uma dada variação da pressão, enquanto o volume total da mesma é mantido constante. No decorrer do capítulo será mostrado que  $1/Q$  é uma relação entre as compressibilidades total, do fluido e dos grãos sólidos.

### 2.1.5 Comentários

A teoria da consolidação tridimensional de Biot é mais conhecida atualmente como teoria da poroelasticidade linear, chamada assim pela primeira vez por Geertsma [16]. Esta teoria foi bastante estudada devido a grande aplicabilidade em problemas de acoplamento fluido-estrutura e reformulada algumas vezes para melhor se adequar para determinado fim. Biot estendeu para materiais anisotrópicos e não lineares [4], [5]. Desenvolveu também estudos de propagação de ondas em meios porosos [6].

Rice e Cleary [26] reformularam as equações da teoria da poroelasticidade de Biot propondo novas variáveis, que descrevem melhor o comportamento poroelástico de rochas e solos e são facilmente medidas em

laboratório. Eles apresentaram uma tabela com estas novas propriedades poroelásticas para algumas rochas.

De posse das formulações de Biot e de Rice e Cleary, nota-se que as constantes de Biot não são capazes de descrever individualmente o meio poroso, ou seja, elas estão amarradas para um sistema fluido-estrutura, assim não é possível por exemplo identificar a compressibilidade do fluido ou da matriz sólida de forma separada. Neste ponto de vista, as variáveis introduzidas por Rice e Cleary tornam-se bastante atraentes, pois apresentam as contribuições individuais das fases sólida e líquida. Por exemplo, é possível obter valores individuais para a compressibilidade da matriz sólida, dos poros e do fluido. Isto é bastante útil em análises de acoplamento geomecânica/reservatório, pois facilitam na formulação matemática do modelo podendo realizar hipóteses diferentes para o sólido e para o fluido.

## 2.2 Formulação Micromecânica

Detournay e Cheng definiram a “Formulação Micromecânica” como a abordagem onde as contribuições individuais dos constituintes sólido e fluido são explicitamente consideradas [14]. Esta formulação foi realizada fazendo uso das equações da poroelasticidade clássica desenvolvidas por Biot e por Rice e Cleary. Eles retrabalharam estas introduzindo conceitos de variações de volumes e realizando o acoplamento deformação-difusão.

Para analisar o sistema sólido-fluido em uma forma “micromecânica”, Detournay e Cheng avaliaram a resposta volumétrica de um meio poroelástico sujeito a uma tensão total isotrópica aplicada  $\sigma$  e uma poro-pressão  $p$ <sup>4</sup>. Este carregamento foi decomposto em duas parcelas: a primeira correspondente a tensão efetiva de Terzaghi  $\sigma' = \sigma + p$  e a segunda componente considerando a pressão confinante com a mesma magnitude da poro-pressão  $p' = p$ . Esta decomposição do carregamento será denotada por  $\sigma'$  e  $p'$ .

Nesta formulação, os conceitos das compressibilidades dos constituintes que formam o meio poroso são introduzidos. Além disso, são esclarecidas as condições drenada e não drenada para o material.

---

<sup>4</sup>Para manter a mesma notação e convenção de sinais em todo trabalho, a formulação micromecânica não será abordada com a mesma notação usada por Detournay e Cheng [14]. Assim, as variáveis se relacionam da seguinte forma: a tensão total isotrópica é equivalente à pressão total de [14] com sinal negativo ( $\sigma = -P$ ) e a tensão efetiva de Terzaghi é equivalente à pressão efetiva de Terzaghi de [14] com sinal negativo ( $\sigma' = -P'$ ).

## 2.2.1 Respostas volumétricas drenada e não drenada

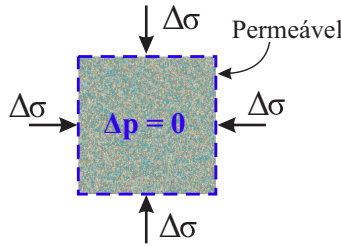
As respostas drenada e não drenada são usadas em testes de laboratório para determinar propriedades poroelásticas. Estes dois modos de deformação definem os limites de comportamento do material.

- **Resposta drenada** ( $\delta p = 0$ )

Nesta condição, conforme mostrado na Figura 2.2, os efeitos da variação volumétrica são mensurados sob condição de variação de pressão nula do fluido. Ou seja, o fluido pode movimentar-se sem resistência nos poros do material.

$$\frac{1}{K_b} = \frac{1}{V_b} \frac{\delta V_b}{\delta \sigma} \Big|_{\delta p=0} \quad (2.26)$$

O módulo de compressão volumétrica drenado  $K_b$  é um exemplo de propriedade poroelástica determinada nesta condição.



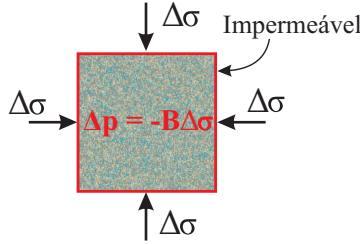
**Figura 2.2** – Volume de controle para teste drenado.

- **Resposta não drenada** ( $\delta \zeta = 0$ )

Conforme mostrado na Figura 2.3, a resposta não drenada caracteriza a condição onde o fluido é mantido preso no meio poroso, ou seja, nenhum fluido atravessa as faces do volume de controle.

$$\frac{1}{K_b^u} = \frac{1}{V_b} \frac{\delta V_b}{\delta \sigma} \Big|_{\delta \zeta=0} \quad (2.27)$$

O módulo de compressão volumétrica não drenado  $K_b^u$ <sup>5</sup> é um exemplo de propriedade não drenada. Este apresenta valores definidos entre  $K_b$  e  $+\infty$ . Nota-se que estas propriedades não drenadas são afetadas pela presença do fluido.



**Figura 2.3** – Volume de controle para teste não drenado.

Usando estas definições, podemos introduzir um novo coeficiente poroelástico chamado de coeficiente de Skempton, definido para uma condição não drenada  $\delta\zeta = 0$  da equação 2.20,

$$B = -\frac{\delta p}{\delta \sigma} \Big|_{\delta \zeta = 0} \quad (2.28)$$

Este coeficiente é definido pela razão entre a variação da pressão do fluido  $p$  e a variação da tensão total aplicada  $\sigma$ . Fisicamente o coeficiente de Skempton é a medida de como a tensão aplicada em um meio poroso é distribuída entre a matriz sólida e o fluido. Este coeficiente varia entre 0 e 1. Este tende a um para meios porosos saturados com fluido incompressível, porque a carga é suportada pelo fluido. E tende a zero para meios porosos infiltrados com gás, onde a carga é suportada pela matriz sólida [36].

### 2.2.2 Resposta volumétrica de um meio poroelástico

Para análise da resposta volumétrica, vamos considerar uma amostra de meio poroso com volume total  $V_b$ , contendo um espaço poroso interconectado de volume  $V_p$ . O volume combinado pela matriz sólida e os poros isolados é definido por  $V_s$ , assim  $V_b = V_p + V_s$ . Considerando o meio

<sup>5</sup>Neste trabalho as propriedades determinadas sob condição não drenada serão identificadas com sobrescrito  $u$ , do inglês *undrained*.

totalmente saturado, o fluido que pode escoar livremente na amostra é então  $V_f = V_p$ . A porosidade  $\phi$  é definida pela razão entre  $V_p/V_b$  [14].

Assim, a resposta volumétrica de um material poroso sob as componentes do carregamento  $\sigma'$  e  $p'$  pode ser descrita em termos de  $\delta V_b/V_b$  e  $\delta V_p/V_p$ , deformação volumétrica do volume total e do espaço poroso, respectivamente. Substituindo estas novas componentes do carregamento e as definições dos volumes em 2.19 e 2.20, obtém-se

$$\frac{\delta V_b}{V_b} = \frac{\sigma'}{K_b} - \frac{p'}{K_s} \quad (2.29)$$

$$\frac{\delta V_p}{V_p} = \frac{\sigma'}{K_p} - \frac{p'}{K_\phi} \quad (2.30)$$

Estas equações constitutivas introduzem três novos módulos de compressão  $K'_s$ ,  $K_p$  e  $K_\phi$ , os quais serão definidos na seção 2.2.4. As equações 2.29 e 2.30 podem ser reescritas usando o volume da matriz sólida  $V_s$  e a porosidade  $\phi$  como variáveis dependentes [14].

$$\frac{\delta V_s}{V_s} = \frac{1}{(1-\phi)K'_s} \sigma' - \frac{1}{1-\phi} \left( \frac{1}{K'_s} - \frac{\phi}{K_\phi} \right) p' \quad (2.31)$$

$$\frac{\delta \phi}{1-\phi} = \left( \frac{1}{K_b} - \frac{1}{1-\phi} \frac{1}{K'_s} \right) \sigma' + \frac{\phi}{1-\phi} \left( \frac{1}{K'_s} - \frac{1}{K_\phi} \right) p' \quad (2.32)$$

As duas equações acima descrevem a deformação volumétrica da matriz sólida e a deformação relativa do espaço poroso com relação ao volume da matriz sólida.

As equações constitutivas 2.29 à 2.32 são as respostas volumétricas para os diferentes constituintes do meio poroso, ou seja, as deformações volumétricas total, da matriz sólida e dos poros estão definidas explicitamente. A grande vantagem desta abordagem micromecânica está na análise de casos particulares<sup>6</sup>, os quais consideram hipóteses específicas para cada componente. Por exemplo, em aplicações da geomecânica podem ocorrer casos onde a matriz sólida da rocha é considerada incompressível e o fluido em seu interior considerado compressível. Assim, estas consi-

---

<sup>6</sup>No apêndice A estão apresentadas as correlações entre as constantes poroelásticas, e na seção A.3 estão discutidos os casos particulares.

derações podem ser realizadas nesta formulação, devido a mesma possuir as compressibilidades dos diferentes constituintes de forma explícita nas equações constitutivas. Outra vantagem desta formulação está na facilidade em obter os valores das propriedades poroelásticas, pois podem ser mensurados individualmente em ensaios de laboratório, ao contrário das constantes clássicas de Biot que necessitavam obter valores para um sistema fluido-estrutura.

### 2.2.3 Resposta volumétrica de um meio poroelástico ideal

Agora vamos considerar um material poroso ideal formado por poros completamente conectados e por uma matriz sólida isotrópica e microscopicamente homogênea <sup>7</sup>. Assim, quando é aplicado um carregamento  $p'$  neste material, todo o constituinte sólido está exposto a uma pressão uniforme  $p$  em todos os pontos. Com isso, este carregamento não produz nenhuma deformação cisalhante e este material está submetido a apenas deformações volumétricas uniformes [15], tal que

$$\frac{\delta V_s}{V_s} = \frac{\delta V_p}{V_p} = \frac{\delta V_b}{V_b} \quad (2.33)$$

Assim, aplicando 2.33 em 2.29 e 2.30 com  $\delta \sigma' = 0$  obtém-se a seguinte identidade entre os módulos de compressão volumétrica

$$K'_s = K_\phi = K_s \quad (2.34)$$

onde  $K_s$  é agora definido como o módulo de compressão volumétrica da matriz sólida ou dos grãos sólidos. Com a identidade 2.34, as equações 2.31 e 2.32 são reduzidas para

$$\frac{\delta V_s}{V_s} = \frac{1}{(1-\phi)K_s} \sigma' - \frac{1}{K_s} p' \quad (2.35)$$

$$\frac{\delta \phi}{1-\phi} = \left( \frac{1}{K_b} - \frac{1}{1-\phi} \frac{1}{K_s} \right) \sigma' \quad (2.36)$$

Nota-se pela equação 2.36, que a variação da porosidade é controlada pela variação da tensão efetiva de Terzaghi  $\sigma'$  [14]. Assim, para este caso parti-

---

<sup>7</sup>O meio poroso abordado neste trabalho é a rocha reservatório, assim neste contexto uma rocha reservatório é dita homogênea quando esta é completamente formada por grãos sólidos de um mesmo mineral [36].



cular, as relações para as constantes  $\alpha$ ,  $K_b^u$ ,  $B$  e  $1/Q$  em função das compressibilidades apresentadas no apêndice A ficam simplificadas para

$$\alpha = 1 - \frac{K_b}{K_s} \quad (2.37)$$

$$K_b^u = K_b \left[ 1 + \frac{\alpha^2 K_f}{(1 - \alpha)(\alpha - \phi)K_f + \phi K_b} \right] \quad (2.38)$$

$$B = \frac{\alpha K_f}{[\alpha - \phi(1 - \alpha)]K_f + \phi K_b} \quad (2.39)$$

$$\frac{1}{Q} = \frac{\phi}{K_f} + \frac{\alpha - \phi}{K_s} \quad (2.40)$$

Este caso particular apresentado nesta seção será aplicado no modelo matemático que descreve o acoplamento geomecânica/reservatório desenvolvido neste trabalho.

## 2.2.4 Definição das compressibilidades

Na engenharia de petróleo, os parâmetros de compressibilidades são mais usuais que os módulos de compressão volumétrica, que foram descritos até o momento. Assim, as compressibilidades são definidas pelo inverso dos módulos de compressão volumétrica e indicam quanto determinado constituinte pode ser comprimido. Em uma forma geral, são razões da variação fracional do volume com respeito a uma variação de pressão [36]. Estas são apresentadas a seguir

$$c_b = \frac{1}{K_b} = \frac{1}{V_b} \frac{\delta V_b}{\delta \sigma} \Big|_{\delta p=0} \quad (2.41)$$

$$c_s = \frac{1}{K_s} = -\frac{1}{V_b} \frac{\delta V_b}{\delta p} \Big|_{\delta \sigma'=0} \quad (2.42)$$

$$c_p = \frac{1}{K_p} = \frac{1}{V_p} \frac{\delta V_p}{\delta \sigma} \Big|_{\delta p=0} \quad (2.43)$$

$$c_f = \frac{1}{K_f} = -\frac{1}{V_f} \frac{\delta V_f}{\delta p} \quad (2.44)$$

onde  $c_b$ ,  $c_s$ ,  $c_p$  e  $c_f$  representam as compressibilidades total, da matriz sólida ou dos grãos sólidos, dos poros e do fluido, respectivamente. Maiores detalhes destes parâmetros e como são mensurados em laboratório podem ser encontrados em Wang [36].

## FORMULAÇÃO MATEMÁTICA

Neste capítulo são apresentadas as equações governantes que serão utilizadas nas simulações deste trabalho. Estas equações descrevem o fenômeno físico do acoplamento entre a geomecânica e o escoamento de fluido no reservatório e são derivadas de três princípios básicos: equilíbrio de forças no meio poroso, conservação da massa para o fluido e lei de Darcy [10]. A formulação matemática deste problema pode ser separada em dois modelos: o modelo geomecânico que é responsável por descrever o estado de tensões na rocha reservatório e o modelo de reservatório que representa o escoamento do fluido em um meio poroso deformável. A seguir, são deduzidos estes dois modelos para um domínio bidimensional.

### 3.1 Modelo geomecânico

As equações governantes para o modelo geomecânico são derivadas da teoria da poroelasticidade de Biot e da lei das tensões efetivas de Terzaghi, definidas na seção 2.1. Como no presente trabalho será considerado um domínio físico bidimensional, as equações do equilíbrio de tensões descritas em 2.2 necessitam ser modificadas para um estado bidimensional. Assim, optou-se por um estado plano de deformações, o qual assume que as deformações da rocha reservatório na direção  $z$  são nulas e consequentemente o problema torna-se reduzido em duas dimensões no plano  $(x, y)$ . Esta hipótese baseia-se na consideração que nas fronteiras normais

a direção  $z$ , a rocha reservatório está em contato com rochas adjacentes de rigidez bem maiores ao do reservatório, restringindo o deslocamento da mesma nesta direção.

Neste modelo são assumidas as seguintes hipóteses:

- Material isotrópico e homogêneo,
- Matriz sólida formada por grãos sólidos compressíveis,
- Condição de pequenas deformações,
- Reversibilidade na relação tensão-deformação,
- Relação tensão-deformação linear regida pela lei de Hooke,
- Considera forças de corpo,
- Estado plano de deformações ( $\varepsilon_{zz} = \varepsilon_{xz} = \varepsilon_{yz} = 0$ ).

Lembrando que a convenção de sinais adotada no presente trabalho é tensões de tração como positivas e tensões de compressão negativas. Já a deformação volumétrica é definida positiva para expansão e negativa para contração.

Antes de deduzirmos as equações para este modelo, é interessante analisar a equação 2.10, mais precisamente a parcela das tensões efetivas, reescrita aqui por completeza.

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}' - \alpha p \boldsymbol{\delta}$$

As tensões efetivas atuam na matriz sólida e estão relacionadas com o estado de deformação do meio poroso. Como a matriz sólida é analisada sem considerar o fluido contido nos poros, a deformação do meio poroso não depende da poro-pressão [36]. Desta forma, a relação entre tensão efetiva e deformação pode ser expressa na forma,

$$\boldsymbol{\sigma}' = \mathbb{D} \boldsymbol{\varepsilon} \quad (3.1)$$

onde  $\mathbb{D}$  é a matriz constitutiva, e pode ser definida através de vários modelos constitutivos, conforme apresentados por Desai e Siriwardane [13]. Neste trabalho é considerado o modelo constitutivo elástico linear, mas conforme análise, outros modelos constitutivos como elástico não-linear,

plástico ou viscoelástico podem ser adicionados ao modelo aqui desenvolvido.

Voltando à dedução das equações governantes, vamos definir as equações de equilíbrio de forças para o estado plano de deformações. Partindo de 2.2 e adicionando o termo das forças de campo, tem-se

$$\begin{aligned}\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + \rho g_x &= 0 \\ \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \rho g_y &= 0\end{aligned}\quad (3.2)$$

onde  $g_x$  e  $g_y$  são as componentes do vetor aceleração da gravidade  $\mathbf{g}$  e  $\rho$  é a densidade total da rocha, definida por

$$\rho = (1 - \phi)\rho_s + \phi\rho_f \quad (3.3)$$

onde  $\rho_s$  e  $\rho_f$  são as densidades dos grãos sólidos e do fluido, respectivamente.

Assim, substituindo a condição de estado plano de deformações ( $\varepsilon_{zz} = \varepsilon_{xz} = \varepsilon_{yz} = 0$ ) em 2.4 e isolando as tensões totais como variáveis dependentes, chega-se em

$$\begin{aligned}\sigma_{xx} &= \lambda \left[ \frac{1-\nu}{\nu} \varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} \right] - \alpha p \\ \sigma_{yy} &= \lambda \left[ \varepsilon_{xx} + \frac{1-\nu}{\nu} \varepsilon_{yy} \right] - \alpha p \\ \sigma_{xy} &= 2G\varepsilon_{xy}\end{aligned}\quad (3.4)$$

onde a constante  $\alpha$  é definida pela expressão 2.37 e  $\lambda$  é a constante de Lamé, dada por

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \quad (3.5)$$

Nota-se da equação 2.4, que a componente normal da tensão total na direção  $z$  não é nula, e é representada por

$$\sigma_{zz} = \nu(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) - (1-2\nu)\alpha p \quad (3.6)$$

Reescrevendo de 2.3, as relações das deformações com os deslocamentos, para este caso, tem-se

$$\begin{aligned}\epsilon_{xx} &= \frac{\partial u}{\partial x} \\ \epsilon_{yy} &= \frac{\partial v}{\partial y} \\ \epsilon_{xy} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)\end{aligned}\tag{3.7}$$

Logo, o conjunto de equações 3.2, 3.4 e 3.7 descrevem o comportamento mecânico da rocha reservatório, onde as componentes do deslocamento são independentes da direção  $z$ . Substituindo 3.7 em 3.4, e estas em 3.2, obtém-se as equações de equilíbrio na forma diferencial em função dos deslocamentos [36],

$$G \left[ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right] + \frac{G}{1-2\nu} \left[ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \right] + \rho g_x = \alpha \frac{\partial p}{\partial x} \tag{3.8}$$

$$G \left[ \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right] + \frac{G}{1-2\nu} \left[ \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right] + \rho g_y = \alpha \frac{\partial p}{\partial y} \tag{3.9}$$

Portanto, as equações 3.8 e 3.9 são as equações governantes do modelo geomecânico e serão resolvidas numericamente no presente trabalho. Nota-se, que estas apresentam  $u$ ,  $v$  e  $p$  como incógnitas, assim necessita-se de mais uma equação para completar o sistema. A equação que completa o sistema é obtida do modelo de reservatório, e será deduzida na próxima seção.

## 3.2 Modelo de reservatório

Neste trabalho é considerada a descrição macroscópica clássica de escoamento em meios porosos, explicada em detalhes por Hurtado [19], onde não é necessário o conhecimento morfológico do meio poroso. Assim, as grandezas físicas são definidas em toda a região porosa e representam médias volumétricas dos valores microscópicos na região circundante.

As equações governantes do modelo de reservatório são baseadas na

equação da conservação da massa para o fluido e da lei de Darcy generalizada para meios porosos deformáveis.

A dedução da equação da conservação da massa do fluido será realizada fazendo um paralelo entre o escoamento de fluido em meios porosos deformáveis e não deformáveis. Isto possibilita, através da análise dos fluxos de massa, perceber as similaridades entre os dois casos e identificar o termo adicional ao fluxo devido ao movimento do sólido. Além disso, desta forma, torna-se bastante claro o significado físico de cada uma das velocidades envolvidas no problema, os quais muitas vezes são apresentadas de forma confusa na literatura.

Assim, para este modelo são feitas as seguintes hipóteses:

- Escoamento monofásico bidimensional,
- Meio poroso isotrópico e homogêneo,
- Rocha e fluido isotérmicos,
- Fluido pouco compressível,
- Viscosidade do fluido constante,
- Permeabilidade constante,
- Matriz sólida formada por grãos sólidos compressíveis,
- Consideração da gravidade.

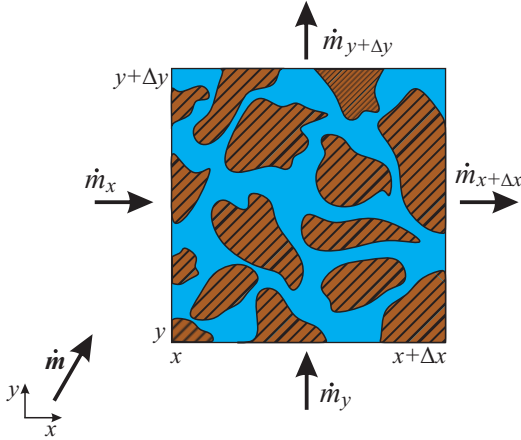
Considere um volume de controle fixo no espaço, conforme mostrado na Figura 3.1, cujo volume total é  $V_b = \Delta x \cdot \Delta y \cdot 1^1$ , o volume de poros interconectados  $V_p$  e o volume da matriz sólida, incluindo os poros não conectados  $V_s$ . Com isso,

$$V_b = V_p + V_s \quad (3.10)$$

Para um meio poroso totalmente saturado, o volume de fluido  $V_f$  que pode escoar livremente pelo meio é o próprio volume dos poros, assim  $V_f = V_p$ . E a porosidade  $\phi$  é definida pela razão entre o volume poroso e o volume total, ou seja,

---

<sup>1</sup>A dimensão do volume de controle na direção  $z$  é igual a unidade.



**Figura 3.1** – Volume de controle para o balanço de massa.

$$\phi = \frac{V_p}{V_b} = \frac{V_p}{V_p + V_s} \quad (3.11)$$

As variáveis  $\dot{m}_x$  e  $\dot{m}_y$ , ilustradas na Figura 3.1, são as parcelas do fluxo de massa do fluido (massa por unidade de tempo) que atravessam as fronteiras do volume de controle nas direções  $x$  e  $y$ , respectivamente.

Afim de observar com mais detalhes o fluxo de massa através de uma dada seção plana, as Figuras 3.2 e 3.3 apresentam o fluxo de massa através da fronteira esquerda do volume de controle da Figura 3.1, para a matriz sólida em repouso e em movimento, respectivamente.

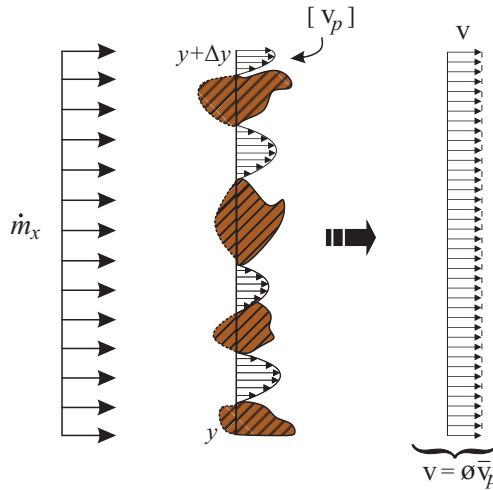
Para o caso onde o meio poroso não se deforma, conforme Figura 3.2, o fluxo de massa através da seção com comprimento  $\Delta y$  é definido por

$$\dot{m}_x = \int_y^{y+\Delta y} \rho_f [\mathbf{v}_{px}] dy \quad (3.12)$$

onde  $\mathbf{v}_p$  é a velocidade de poros, o qual representa a velocidade do fluido em cada poro e varia de poro para poro. Como é inviável avaliar  $\mathbf{v}_p$ , devido à complexidade da geometria do meio poroso, o fluxo através da seção porosa é representado em função da velocidade de Darcy ou velocidade superficial, que é relacionada com a velocidade de poros média na forma

$$\mathbf{v} = \phi \bar{\mathbf{v}}_p \quad (3.13)$$





**Figura 3.2** – Velocidades envolvidas no escoamento em um meio poroso não deformável.

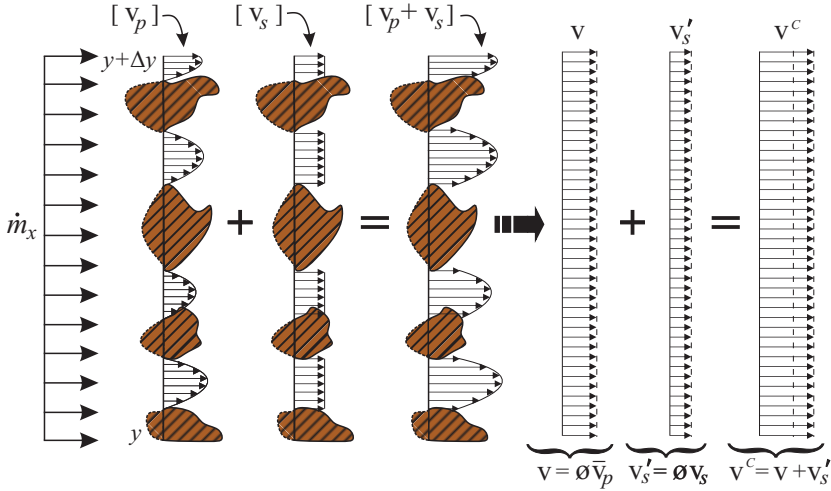
onde,  $v$  é igual a média da velocidade de poros multiplicada pela fração de vazio da seção plana, porém esta velocidade  $v$  está distribuída em toda a seção de comprimento  $\Delta y$ , conforme Figura 3.2. Em outras palavras,  $v$  pode ser interpretada como a velocidade com que o fluido estaria se movendo, se este ocupasse toda a seção de comprimento  $\Delta y$ , e que reproduzisse a mesma vazão mássica que passa em cada poro com velocidade  $v_p$  nesta mesma seção. Com isso, o fluxo de massa através desta seção pode ser expresso por

$$\dot{m}_x = \rho_f v_x \Delta y \quad (3.14)$$

De forma análoga para o meio poroso deformável, conforme ilustrado na Figura 3.3, o fluxo de massa através da seção de comprimento  $\Delta y$  é definido por

$$\dot{m}_x = \underbrace{\int_y^{y+\Delta y} \rho_f v_{px} dy}_{\dot{m}_f} + \underbrace{\int_y^{y+\Delta y} \rho_f v_{sx} dy}_{\dot{m}_s} \quad (3.15)$$

onde  $v_s$  é a velocidade com que a matriz sólida se movimenta. Nota-se,



**Figura 3.3** – Velocidades envolvidas no escoamento em um meio poroso deformável.

que o fluxo de massa neste caso é acrescentado por uma parcela  $\dot{m}_s$ , que pode ser interpretada como a quantidade de massa de fluido que é carregada pela matriz sólida para dentro do volume de controle. Assim, agrupando os termos de 3.15, obtém-se

$$\dot{m}_x = \int_y^{y+\Delta y} \rho_f [v_{px} + v_{sx}] dy \quad (3.16)$$

Cabe observar neste momento, tanto pela equação 3.16, quanto pela Figura 3.3, que a velocidade do fluido que atravessa a fração de vazios da seção de comprimento  $\Delta y$  é dada pela soma de  $\mathbf{v}_p$  e  $\mathbf{v}_s$ . Assim, como é sabido da dificuldade de representação de  $\mathbf{v}_p$ , agora para o meio poroso deformável, o fluxo de massa é representado por uma velocidade de Darcy composta, a qual é definida por

$$\mathbf{v}^c = \phi (\bar{\mathbf{v}}_p + \mathbf{v}_s) \quad (3.17)$$

Assim, conforme Figura 3.3, a velocidade de Darcy composta é formada pela soma de duas velocidades, tal que

$$\mathbf{v}^c = \mathbf{v} + \mathbf{v}'_s \quad (3.18)$$

onde  $\mathbf{v}$  é a tradicional velocidade de Darcy, relacionada com o gradiente de pressão na forma

$$\mathbf{v} = -\frac{K}{\mu} \cdot (\nabla p - \rho_f \mathbf{g}) \quad (3.19)$$

e  $\mathbf{v}'_s$ , definiremos como a velocidade de Darcy da matriz sólida, dada por

$$\mathbf{v}'_s = \phi \mathbf{v}_s \quad (3.20)$$

Para interpretar  $\mathbf{v}'_s$ , vamos pensar em um caso idealizado onde o fluido não apresenta movimento em relação a matriz sólida, ou seja, tem-se  $\mathbf{v}_p = 0$ . Aparentemente, não haveria fluxo de massa através da fronteira do volume de controle, porém, se o sólido estiver se movendo com velocidade  $\mathbf{v}_s$ , teremos massa de fluido sendo carregada pelo sólido através da fronteira. Assim, a velocidade que reproduz este fluxo de massa de forma distribuída em toda a seção de comprimento  $\Delta y$  é a velocidade de Darcy da matriz sólida.

Portanto, o fluxo de massa de fluido escoando em um meio poroso deformável através de uma seção plana pode ser representado por

$$\dot{m}_x = \rho_f v_x^c \Delta y \quad (3.21)$$

Após o esclarecimento do fluxo de massa envolvido em questão, podemos deduzir a equação da conservação da massa em um meio poroso deformável, através de um balanço de massa no volume de controle da Figura 3.1, na forma

$$\begin{aligned} & \left[ \rho_f v_x^c \Big|_{x,y,\bar{t}} - \rho_f v_x^c \Big|_{x+\Delta x,y,\bar{t}} \right] \Delta y \cdot 1 \\ + & \left[ \rho_f v_y^c \Big|_{x,y,\bar{t}} - \rho_f v_y^c \Big|_{x,y+\Delta y,\bar{t}} \right] \Delta x \cdot 1 \\ = & \left[ \frac{\partial(\rho_f \phi)}{\partial t} + q \right] \Delta x \cdot \Delta y \cdot 1 \end{aligned} \quad (3.22)$$

onde  $q$  é a taxa de massa injetada ou removida do volume de controle (massa por unidade de volume por unidade de tempo). Por convenção,  $q$  é positivo para massa introduzida no volume de controle e negativo para

massa retirada do volume de controle. Dividindo 3.22 por  $\Delta x \cdot \Delta y \cdot 1$ , obtém-se

$$\frac{\rho_f v_x^c \Big|_{x,y,\bar{t}} - \rho_f v_x^c \Big|_{x+\Delta x,y,\bar{t}}}{\Delta x} + \frac{\rho_f v_y^c \Big|_{x,y,\bar{t}} - \rho_f v_y^c \Big|_{x,y+\Delta y,\bar{t}}}{\Delta y} - q = \frac{\partial(\rho_f \phi)}{\partial t} \quad (3.23)$$

Aplicando o limite com  $\Delta x, \Delta y \rightarrow 0$ , chega-se a equação da conservação da massa na forma

$$\frac{\partial(\rho_f \phi)}{\partial t} = -\frac{\partial(\rho_f v_x^c)}{\partial x} - \frac{\partial(\rho_f v_y^c)}{\partial y} - q \quad (3.24)$$

ou, escrita na forma compacta

$$\frac{\partial(\rho_f \phi)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_f \mathbf{v}^c) + q = 0 \quad (3.25)$$

Comparando 3.25 com a equação da conservação da massa para meios porosos não deformáveis,

$$\frac{\partial(\rho_f \phi)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_f \mathbf{v}) + q = 0 \quad (3.26)$$

tem-se que a velocidade  $\mathbf{v}^c$  em meios porosos deformáveis, equivale à velocidade  $\mathbf{v}$  para meios porosos não deformáveis.

Substituindo 3.20 em 3.18, e esta em 3.25, obtém-se a equação da conservação da massa contemplando a velocidade da fase sólida,

$$\frac{\partial(\rho_f \phi)}{\partial t} + \nabla \cdot [\rho_f (\mathbf{v} + \phi \mathbf{v}_s)] + q = 0 \quad (3.27)$$

Aplicando a hipótese de fluido pouco compressível, podemos escrever a equação acima na forma,

$$\frac{1}{\rho_f} \frac{\partial(\rho_f \phi)}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{v} + \phi \mathbf{v}_s) + \tilde{q} = 0 \quad (3.28)$$

onde  $\tilde{q}$  é uma vazão volumétrica retirada ou injetada do volume de controle por unidade de volume.

Expandindo o termo acumulativo da equação 3.28 e considerando que o meio poroso é homogêneo, ou seja, não há variação da porosidade em relação as coordenadas espaciais, obtém-se

$$\underbrace{\nabla \cdot \mathbf{v}}_{\text{I}} + \underbrace{\phi \nabla \cdot \mathbf{v}_s}_{\text{II}} + \underbrace{\frac{\partial \phi}{\partial t}}_{\text{III}} + \underbrace{\frac{\phi}{\rho_f} \frac{\partial \rho_f}{\partial t}}_{\text{IV}} + \tilde{q} = 0 \quad (3.29)$$

Neste momento, necessitamos expressar cada termo da equação 3.29 em função das variáveis primárias  $u$ ,  $v$  e  $p$ , sendo elas, componentes do vetor deslocamento e pressão do fluido. Assim, para facilitar nesta dedução, vamos trabalhar individualmente cada termo.

- **Termo I**

O divergente de  $\mathbf{v}$  é obtido fazendo uso da lei de Darcy, o qual relaciona a taxa de escoamento com o gradiente de pressão do fluido, assim

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = \nabla \cdot \left[ -\frac{K}{\mu} \cdot (\nabla p - \rho_f \mathbf{g}) \right] \quad (3.30)$$

onde  $\mathbf{g}$  é o vetor aceleração da gravidade.

- **Termo II**

Partindo da definição de deformação volumétrica do meio poroso, expressa por

$$\varepsilon = \nabla \cdot \mathbf{u} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \quad (3.31)$$

onde  $\mathbf{u}$  é o vetor deslocamento do meio poroso. Derivando 3.31 em função do tempo, tem-se

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = \dot{\varepsilon} = \nabla \cdot \mathbf{v}_s \quad (3.32)$$

Assim, o termo II pode ser definido por

$$\phi \nabla \cdot \mathbf{v}_s = \phi \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} \quad (3.33)$$

ou, expresso na forma

$$\phi \nabla \cdot \mathbf{v}_s = \phi \frac{\mathbf{m}^T \partial \boldsymbol{\varepsilon}}{\partial t} \quad (3.34)$$

onde  $\mathbf{m}$  é um vetor unidimensional com elementos binários, onde define-se 1 para as componentes normais e 0 para as componentes cisalhantes do tensor deformação  $\epsilon$ . Este é representado por

$$\mathbf{m} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T \quad (3.35)$$

Este vetor também auxiliará nas deduções do próximo termo.

### • Termo III

A porosidade é um parâmetro bastante empregado para acoplar o modelo geomecânico com o modelo de reservatório. Várias correlações para expressar a variação temporal da porosidade são encontradas na literatura, tais em Chin *et al.* [10], Geerstma [15], Settari e Mourits [28], Thomas *et al.* [31], Tran *et al.* [32]. Estas correlações apresentam a variação da porosidade em função da deformação volumétrica, da pressão do fluido ou das tensões efetivas. Neste trabalho, a variação da porosidade será definida em função da deformação volumétrica e da pressão do fluido seguindo a abordagem desenvolvida por Detournay e Cheng [14], mostrada na seção 2.2.3. Assim, partindo da definição de porosidade 3.11 e derivando esta equação com relação ao tempo, tem-se

$$d\phi = \frac{1}{V_b} dV_p - V_p \frac{dV_b}{V_b^2} \quad (3.36)$$

Substituindo 3.10 na equação anterior, chega-se em

$$\underbrace{d\phi}_{\text{variação da porosidade}} = (1 - \phi) \underbrace{\frac{dV_b}{V_b}}_{\text{variação do volume total}} - \underbrace{\frac{dV_s}{V_b}}_{\text{variação do volume dos grãos}} \quad (3.37)$$

onde a equação 3.37 mostra que a variação da porosidade é composta por duas parcelas: a primeira corresponde a variação do volume total e a segunda a variação volumétrica dos grãos sólidos. Aqui, cabe ressaltar que em alguns modelos de acoplamento reservatório/geomecânica, como apresentados em Thomas *et al.* [31], Chin e Thomas [9] e Pan *et al.* [25], é assumida a hipótese de grãos sólidos

incompressíveis. Desta forma, o segundo termo de 3.37 é desprezado e a equação para correção da porosidade torna-se

$$d\phi = (1 - \phi) \frac{dV_b}{V_b} \quad (3.38)$$

Esta expressão 3.38 também pode ser obtida através de um balanço de massa da fase sólida [10].

Voltando a equação 3.37, a primeira parcela é representada pela deformação volumétrica, na forma

$$\frac{dV_b}{V_b} = d\epsilon = \mathbf{m}^T d\boldsymbol{\epsilon} \quad (3.39)$$

e a segunda parcela  $dV_s/V_b$  é deduzida a partir da hipótese de material poroso ideal, o qual é formado por poros totalmente conectados e apresenta matriz sólida isotrópica e homogênea. Desta forma, partindo da equação 2.35, e substituindo na mesma a expressão a seguir

$$V_s = (1 - \phi)V_b \quad (3.40)$$

obtém-se

$$\frac{\delta V_s}{V_b} = \frac{1}{K_s} \sigma' - \frac{(1 - \phi)}{K_s} p' \quad (3.41)$$

Considerando que

$$\sigma = \frac{\mathbf{m}^T \boldsymbol{\sigma}}{3} \quad (3.42)$$

e aplicando em 3.41, as definições de  $\sigma'$  e  $p'$  vistas na seção 2.2, chega-se em

$$\frac{\delta V_s}{V_b} = \frac{\frac{\mathbf{m}^T \boldsymbol{\sigma}}{3} + p}{K_s} - \frac{(1 - \phi)p}{K_s} \quad (3.43)$$

No limite,

$$\frac{dV_s}{V_b} = \frac{\frac{\mathbf{m}^T d\boldsymbol{\sigma}}{3} + dp}{K_s} - \frac{(1-\phi)dp}{K_s} \quad (3.44)$$

Neste ponto, define-se a expressão da tensão total 2.10 em sua forma diferencial, dada por

$$d\boldsymbol{\sigma} = d\boldsymbol{\sigma}' - \mathbf{m} \alpha dp \quad (3.45)$$

ou substituindo  $\alpha$  pela expressão 2.37, tem-se

$$d\boldsymbol{\sigma} = d\boldsymbol{\sigma}' - \mathbf{m} \left( 1 - \frac{K_b}{K_s} \right) dp \quad (3.46)$$

Assim, substituindo 3.46 em 3.44,

$$\frac{dV_s}{V_b} = \frac{\frac{\mathbf{m}^T}{3} \left[ d\boldsymbol{\sigma}' - \mathbf{m} \left( 1 - \frac{K_b}{K_s} \right) dp \right] + dp}{K_s} - \frac{(1-\phi)dp}{K_s} \quad (3.47)$$

o qual, o segundo termo de  $dp$  pode ser substituído por  $\mathbf{m}^T \mathbf{m} dp / 3$ , assim

$$\frac{dV_s}{V_b} = \frac{\frac{\mathbf{m}^T}{3} \left[ d\boldsymbol{\sigma}' - \mathbf{m} \left( 1 - \frac{K_b}{K_s} \right) dp \right] + \frac{\mathbf{m}^T \mathbf{m} dp}{3}}{K_s} - \frac{(1-\phi)dp}{K_s} \quad (3.48)$$

Derivando a expressão 3.1, tem-se

$$d\boldsymbol{\sigma}' = \mathbb{D} d\boldsymbol{\epsilon} \quad (3.49)$$

Substituindo 3.49 em 3.48 e reagrupando os termos, chega-se em

$$\frac{dV_s}{V_b} = \frac{\mathbf{m}^T \mathbb{D} d\boldsymbol{\epsilon}}{3K_s} + \left[ \frac{(\phi-1)}{K_s} + \frac{K_b}{K_s^2} \right] dp \quad (3.50)$$

Assim, substituindo 3.50 e 3.39 em 3.37



$$d\phi = (1 - \phi) \mathbf{m}^T d\boldsymbol{\varepsilon} - \frac{\mathbf{m}^T \mathbb{D} d\boldsymbol{\varepsilon}}{3K_s} - \left[ \frac{(\phi - 1)}{K_s} + \frac{K_b}{K_s^2} \right] dp \quad (3.51)$$

Derivando 3.51 com relação ao tempo e reagrupando os termos, obtém-se

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = \mathbf{m}^T \left[ (1 - \phi) - \frac{\mathbb{D}}{3K_s} \right] \frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}{\partial t} - \left[ \frac{(\phi - 1)}{K_s} + \frac{K_b}{K_s^2} \right] \frac{\partial p}{\partial t} \quad (3.52)$$

Logo, a equação 3.52 representa a variação da porosidade em função da deformação volumétrica e da pressão para um meio poroso isotrópico homogêneo formado por grãos sólidos compressíveis.

#### • Termo IV

Este termo que considera o efeito da compressibilidade do fluido, pode ser expandido pela regra da cadeia na forma

$$\frac{\phi}{\rho_f} \frac{\partial \rho_f}{\partial t} = \frac{\phi}{\rho_f} \frac{\partial \rho_f}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial t} \quad (3.53)$$

Aplicando o conceito de módulo de compressão volumétrica do fluido, dado por

$$\frac{1}{K_f} = \frac{1}{\rho_f} \frac{\partial \rho_f}{\partial p} \quad (3.54)$$

O termo IV é definido por

$$\frac{\phi}{\rho_f} \frac{\partial \rho_f}{\partial t} = \frac{\phi}{K_f} \frac{\partial p}{\partial t} \quad (3.55)$$

Logo, substituindo 3.30, 3.34, 3.52 e 3.55 em 3.29, obtém-se

$$\begin{aligned} & \mathbf{m}^T \left[ (1 - \phi) - \frac{\mathbb{D}}{3K_s} \right] \frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}{\partial t} - \left[ \frac{(\phi - 1)}{K_s} + \frac{K_b}{K_s^2} \right] \frac{\partial p}{\partial t} \\ & + \nabla \cdot \left[ -\frac{K}{\mu} \cdot (\nabla p - \rho_f \mathbf{g}) \right] + \phi \frac{\mathbf{m}^T \partial \boldsymbol{\varepsilon}}{\partial t} + \frac{\phi}{K_f} \frac{\partial p}{\partial t} + \tilde{q} = 0 \end{aligned} \quad (3.56)$$

Rearranjando os termos, tem-se

$$\left[ \mathbf{m}^T - \frac{\mathbf{m}^T \mathbb{D}}{3K_s} \right] \frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}{\partial t} + \left[ \frac{\phi}{K_f} + \frac{(1-\phi)}{K_s} - \frac{K_b}{K_s^2} \right] \frac{\partial p}{\partial t} + \nabla \cdot \left[ -\frac{K}{\mu} \cdot (\nabla p - \rho_f \mathbf{g}) \right] + \tilde{q} = 0 \quad (3.57)$$

Nota-se, que o modelo constitutivo do material não foi substituído em 3.57, visto que esta expressão está ainda em função da matriz constitutiva  $\mathbb{D}$ . Assim, aplicando o modelo constitutivo elástico linear e reescrevendo esta em função das compressibilidades <sup>2</sup>, a equação 3.57 resulta em

$$\underbrace{\left[ \phi c_f + c_s(\alpha - \phi) \right] \frac{\partial p}{\partial t}}_{\text{termo que considera o efeito das compressibilidades}} - \underbrace{\nabla \cdot \left[ \frac{K}{\mu} \cdot (\nabla p - \rho_f \mathbf{g}) \right]}_{\text{fluxo total de massa de fluido que atravessa o VC.}} + \underbrace{\tilde{q}}_{\text{termo fonte injeção/ produção de massa do VC.}} = \underbrace{-\alpha \frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}{\partial t}}_{\text{deformação volumétrica total do VC.}} \quad (3.58)$$

Portanto, 3.58 é a equação que representa o escoamento monofásico isotérmico em um meio poroso deformável. Fisicamente, esta equação mostra que para um dado intervalo de tempo, a variação total do volume de controle (VC) é igual a soma das parcelas da variação do volume dos grãos sólidos e do fluido devido suas compressibilidades, mais a variação líquida do volume de fluido que atravessa as faces do VC, mais o volume de fluido injetado ou retirado do VC.

Logo, as equações 3.8, 3.9 e 3.58 formam o conjunto de equações diferenciais necessárias para a solução do acoplamento reservatório/geomecânica.

### 3.3 Comentários

Comparando a equação 3.58 com a equação que descreve o escoamento monofásico em um reservatório convencional <sup>3</sup> [2], [8], duas diferenças principais podem ser observadas. Primeiro, o modelo convencional

<sup>2</sup>A dedução destes termos está apresentada em detalhes no apêndice B.

<sup>3</sup>Define-se aqui modelo de reservatório convencional, aqueles que consideram a velocidade da matriz sólida igual a zero ( $\mathbf{v}_s = 0$ ).

não apresenta o termo da taxa de deformação volumétrica, visto que é desconsiderado qualquer efeito na variação do estado de tensões na rocha. Segundo, o termo envolvendo a compressibilidade dos grãos sólidos  $c_s(\alpha - \phi)$  é substituído por  $c_R \phi^{ref}$  no modelo convencional, onde  $c_R$  é a compressibilidade da rocha ou da formação. Nota-se que o uso da compressibilidade da rocha é uma forma de representar a variação da porosidade em função apenas da variação da pressão em reservatórios convencionais [8].

A partir de 3.58, casos particulares para o modelo de reservatório podem ser obtidos. Por exemplo, assumindo as hipóteses de fluido e grãos sólidos incompressíveis e não havendo termo de geração, a equação para o escoamento torna-se

$$\nabla \cdot \left[ \frac{K}{\mu} \cdot (\nabla p - \rho_f \mathbf{g}) \right] = \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} \quad (3.59)$$

onde desta forma, a variação total do volume de controle por unidade de tempo é igual a variação líquida do volume de fluido que atravessa as faces do VC por unidade de tempo.

Outra análise interessante pode ser feita comparando a equação do modelo de reservatório desenvolvida neste trabalho com a equação 2.17, formulada por Biot para descrever o escoamento. Assim, para equalizar as hipóteses nas duas abordagens, é necessário desconsiderar o efeito da ação da gravidade e o termo de geração em 3.58, resultando esta em

$$\left[ \phi c_f + c_s(\alpha - \phi) \right] \frac{\partial p}{\partial t} - \nabla \cdot \left[ \frac{K}{\mu} \cdot \nabla p \right] = -\alpha \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} \quad (3.60)$$

Desta forma, a diferença observada entre estas está na forma com que o efeito das compressibilidades é considerado. Em 2.17, este efeito é representado apenas por uma constante poroelástica, o módulo de Biot  $Q$ , enquanto em 3.60, as compressibilidades das fases sólida e líquida estão apresentadas de forma explícita. Logo, o módulo de Biot relaciona-se com as compressibilidades na forma

$$\frac{1}{Q} = \phi c_f + c_s(\alpha - \phi) \quad (3.61)$$

o qual foi a mesma expressão obtida por Geertsma [15], deduzida a partir de considerações da resposta volumétrica de um meio poroelástico. Esta concordância entre as expressões, obtidas através de diferentes formas de

dedução por diferentes autores, proporciona grande segurança quanto a veracidade do modelo físico aqui apresentado.

## ACOPLAMENTO RESERVATÓRIO/GEOMECÂNICA

Diferentes métodos de acoplamento entre os modelos de reservatório e geomecânico vêm sendo estudados por diversos pesquisadores, objetivando melhorar a acurácia, convergência e eficiência computacional da solução. Cada método de acoplamento apresenta suas vantagens e desvantagens, e a melhor escolha dependerá das necessidades do problema a ser resolvido [33].

Na solução deste problema acoplado, várias dificuldades existem, principalmente relacionadas com as não-linearidades e com os diferentes métodos numéricos aplicados para cada modelo, pois tradicionalmente o modelo geomecânico é resolvido pelo método dos elementos finitos e o modelo de reservatório pelo método dos volumes finitos ou das diferenças finitas.

Uma forma encontrada por alguns pesquisadores, como Settari e Mourits [28], Samier *et al.* [27], Minkoff *et al.* [23], para resolver este acoplamento é fazer uso de simuladores comerciais, acoplando simuladores de reservatório comerciais com programas de análise de tensões convencionais através de um código de interface. Este código de interface é desenvolvido para realizar a troca de informações entre os simuladores. Desta forma, os avanços tecnológicos já desenvolvidos e validados em ambos simuladores podem ser aproveitados. A desvantagem desta forma de so-

lução está na incapacidade de resolver o problema totalmente acoplado, devido as dificuldades em implementar um modelo geomecânico dentro de um simulador de reservatório comercial.

Buscando esclarecer os diferentes níveis de acoplamento, as próximas seções irão mostrar como estes são classificados na literatura e os principais parâmetros envolvidos neste acoplamento.

## 4.1 Parâmetros de acoplamento

A Figura 4.1 mostra os principais parâmetros envolvidos no escoamento de fluidos em meios porosos deformáveis, e como estes parâmetros interagem entre si. A principal variável para prever o movimento do fluido e a produtividade do reservatório é a pressão. Esta também é responsável por suportar parte das cargas transmitidas pelas rochas adjacentes ao reservatório [18]. Assim, a variação na pressão do fluido devido ao processo de exploração causa alteração no estado de tensões efetivas da rocha reservatório, fazendo com que esta se deforme. Esta deformação causará uma mudança na estrutura do poro, gerando alterações na porosidade e na permeabilidade da rocha. Fechando o ciclo, estas mudanças ocorridas na porosidade e na permeabilidade afetarão as condições do escoamento.



**Figura 4.1** – Esquema representando a interação da geomecânica com o escoamento de fluido em um reservatório deformável.

Os parâmetros de acoplamento também podem ser analisados através das equações constitutivas que descrevem o fenômeno físico. Para

o modelo de reservatório, na equação 3.58 surgem a porosidade ( $\phi$ ), a permeabilidade ( $K$ ) e a deformação volumétrica ( $\varepsilon$ ) como parâmetros de acoplamento. A porosidade e a permeabilidade<sup>1</sup> são funções da deformação volumétrica, o qual é calculada do modelo geomecânico. Por outro lado, nas equações 3.8 e 3.9 do modelo geomecânico, a pressão do fluido ( $p$ ) aparece como variável de acoplamento, o qual é calculada do modelo de reservatório. Portanto, os dois principais parâmetros de acoplamento entre os modelos de reservatório e o geomecânico são a pressão do fluido e a deformação volumétrica.

## 4.2 Métodos de acoplamento

As equações que descrevem os modelos de reservatório e geomecânico podem ser resolvidas basicamente de duas formas: parcialmente acopladas ou totalmente acopladas. Parcialmente acopladas é quando as equações do escoamento e do estado de tensões são resolvidas separadamente para cada incremento de tempo, enquanto totalmente acopladas são resolvidas simultaneamente [29]. Os métodos de acoplamento são classificados em quatro diferentes tipos: pseudo-acoplado, acoplamento explícito, acoplamento iterativo e totalmente acoplado [32].

### 4.2.1 Pseudo-acoplamento

A principal característica deste método de acoplamento é que o modelo geomecânico não é resolvido durante a simulação, com isso este acaba sendo o menos rigoroso de todos. Neste acoplamento, o próprio simulador de reservatório pode computar algumas respostas aproximadas da geomecânica, como a variação do volume poroso devido à compactação e a variação das tensões horizontais, usando diferentes formas de correlacionar os parâmetros de acoplamento. Uma forma é usar fatores de compressibilidade no simulador de reservatório, como é usado em simuladores convencionais, porém, relacionando estes fatores com propriedades elásticas da rocha, como o coeficiente de Poisson e o módulo de elasticidade. Estas correlações podem ser obtidas realizando simplificações no

---

<sup>1</sup> Cabe observar que o modelo de reservatório proposto neste trabalho considera a permeabilidade constante, conforme hipótese assumida na seção 3.2, porém, como o objetivo deste capítulo é abordar as diferentes formas de acoplamento, neste, também será comentado o acoplamento da permeabilidade com a geomecânica.

modelo do estado de tensões da rocha, conforme apresentadas por Settari e Mourits [28].

Outra opção é implementar dentro do simulador de reservatório modelos empíricos para atualizar a porosidade e a permeabilidade. Estes modelos, elaborados a partir de dados obtidos em ensaios de laboratório, podem ser implementados como tabelas ou curvas de porosidade e permeabilidade variando em função da pressão.

Settari e Walters apresentaram uma forma de obter a variação das tensões horizontais no reservatório sem resolver o estado de tensões, a partir da hipótese de não haver deformações laterais no mesmo. Neste caso idealizado, a variação das tensões horizontais pode ser calculada através de uma simples expressão em função da variação da pressão do fluido [29].

#### 4.2.2 Acoplamento explícito

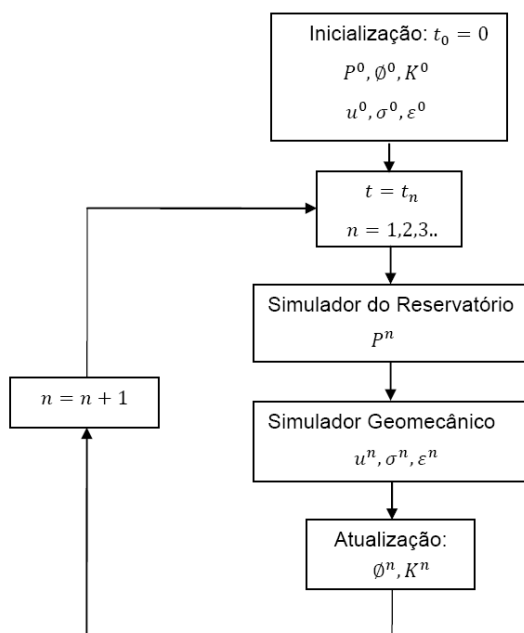
No acoplamento explícito as equações do escoamento e do modelo geomecânico são resolvidas separadamente para cada incremento de tempo. Neste método, também chamado de *one way coupling*, informações são passadas do simulador de reservatório para o simulador geomecânico, mas os resultados obtidos do simulador geomecânico não são passados de volta para o simulador de reservatório no mesmo nível de tempo. Isto significa que o estado de tensões da rocha calculado no simulador geomecânico sente o efeito da variação da pressão do fluido, mas os efeitos causados no modelo de escoamento somente serão computados no simulador de reservatório no passo de tempo seguinte, através da atualização dos parâmetros de fluxo ( $\phi$ ,  $K$ ), conforme mostrado na Figura 4.2.

Este acoplamento também apresenta a possibilidade de resolver os dois modelos em passos de tempo diferentes, ou seja, resolve-se o modelo de reservatório para cada passo de tempo e o modelo geomecânico para selecionados passos de tempo. A frequência de atualização da geomecânica dependerá da magnitude da variação do volume poroso durante os passos de tempo. Se o volume poroso variar lentamente com o tempo, então poucas atualizações geomecânicas serão necessárias. Isto faz com que esta técnica seja bastante aplicável em problemas de subsidência, os quais a escala de tempo com que a frente de fluido se propaga é muito menor comparada com a que o fenômeno de subsidência ocorre durante a simulação. Assim, o modelo geomecânico pode ser resolvido menos vezes durante a simulação, minimizando assim o custo computacional, visto que



a maior parcela do tempo de computação é gasta para resolver o modelo geomecânico [12].

Este método também pode ser aplicado em reservatórios de gás, os quais a compressibilidade do gás é normalmente dominante em relação a compressibilidade da rocha, sendo que o balanço de massa nestes reservatórios é principalmente controlado pela pressão ao invés das tensões e deformações da rocha [33].



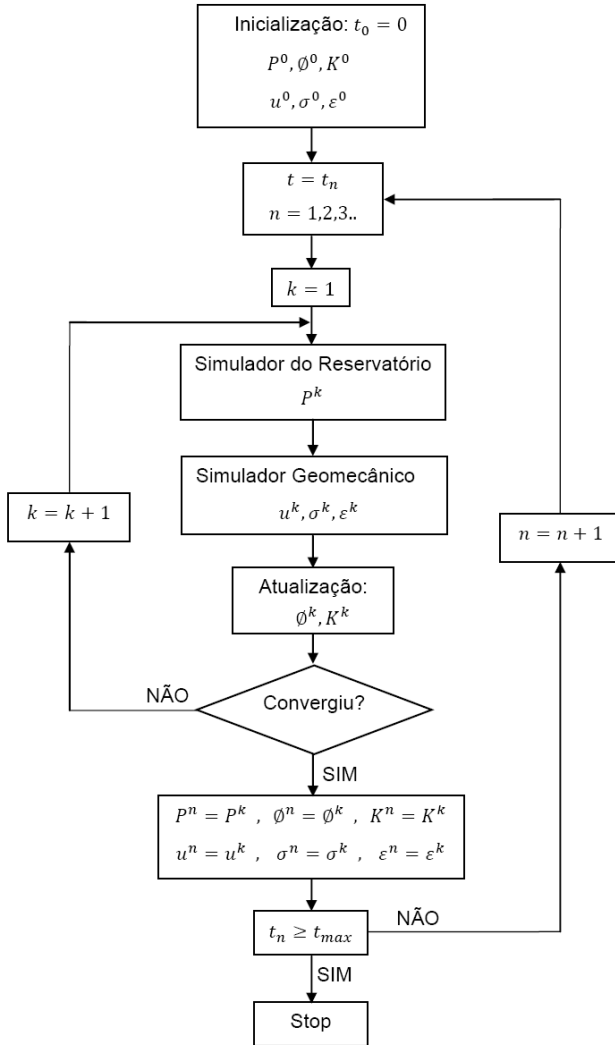
**Figura 4.2** – Fluxograma do acoplamento explícito.

Uma deficiência do acoplamento explícito é que a natureza explícita do acoplamento impõe restrições nos passos de tempo, podendo causar problemas na estabilidade e acurácia da solução.

### 4.2.3 Acoplamento iterativo

Neste tipo de acoplamento, também chamado de *two way coupling*, as variáveis do escoamento e da geomecânica são resolvidas separada-

mente e sequencialmente por um simulador de reservatório e por um simulador geomecânico, onde a troca de informações ocorre em ambos os sentidos para cada nível de tempo.



**Figura 4.3** – Fluxograma do acoplamento iterativo.

A figura anterior mostra como um algoritmo de solução para o acoplamento iterativo pode ser elaborado. Neste,  $n$  equivale ao número de passos no tempo e  $k$  ao número de iterações entre os simuladores de reservatório e geomecânico. Para o instante inicial, as variáveis do acoplamento são estimadas ou calculadas na fase de inicialização. Após, a solução avança no tempo e inicia-se o ciclo iterativo entre os simuladores, no simulador de reservatório são obtidos os valores de pressão que são passados como cargas externas para o simulador geomecânico. No simulador geomecânico são calculados os deslocamentos, as deformações e as tensões, respectivamente. Na sequência, a porosidade e a permeabilidade são atualizadas em função de parâmetros geomecânicos e repassadas ao simulador de reservatório, onde o novo campo de pressão é calculado com os valores atualizados da porosidade e da permeabilidade. Este processo é iterado em  $k$  até a convergência ser alcançada, e após, a solução é avançada para o próximo nível de tempo. O critério de convergência normalmente é baseado nas variações da pressão e da tensão entre as duas últimas iterações.

Esta forma de acoplamento é recomendada para casos onde o balanço de massa é fortemente afetado pela compressibilidade da rocha ou quando o material apresentar modelos constitutivos altamente não lineares.

A principal vantagem desta técnica é a sua flexibilidade e eficiência, pois possibilita que simuladores de reservatório convencionais sejam acoplados com módulos de análise de tensão sem precisar de grandes alterações em ambos os códigos.

Este método apresenta uma solução tão rigorosa quanto ao totalmente acoplado se este for iterado até a convergência [29].

#### 4.2.4 Totalmente acoplado

Neste tipo de acoplamento, as variáveis do escoamento ( $p$ ) e da geomecânica ( $\mathbf{u}$ ) são calculadas simultaneamente através de um único sistema de equações para cada nível de tempo. Este método é também chamado de implícito, onde todo o sistema é resolvido com uma mesma discretização utilizando uma única malha em todo o domínio.

Apresenta como desvantagens a dificuldade em adaptar modelos geomecânicos em simuladores de reservatório já existentes, devido às grandes alterações necessárias nos códigos. Além disso, normalmente é mais

lento que os acoplamentos explícito e iterativo na solução de problemas de grande escala ou para modelos de escoamento e geomecânico mais complexos [12].

## FORMULAÇÃO NUMÉRICA

O principal objetivo deste capítulo é transformar o sistema de equações diferenciais que descrevem o problema físico em um sistema de equações algébricas lineares. Nesta tarefa, segue o principal desafio do presente trabalho, utilizar o mesmo método numérico em ambos os modelos, reservatório e geomecânico, utilizando a mesma malha computacional. Isto proporciona várias vantagens, principalmente relacionadas com a estabilidade da solução numérica e a não necessidade de interpolar as variáveis na troca de informações de um modelo para outro, já que os parâmetros de acoplamento estão sendo calculados no mesmo ponto do domínio discreto. Além disso, é possível resolver o problema em qualquer nível de acoplamento, dos quais foram apresentados no capítulo 4, possibilitando até em resolver o problema totalmente acoplado, visto que está sendo aplicado a mesma discretização em ambos os modelos.

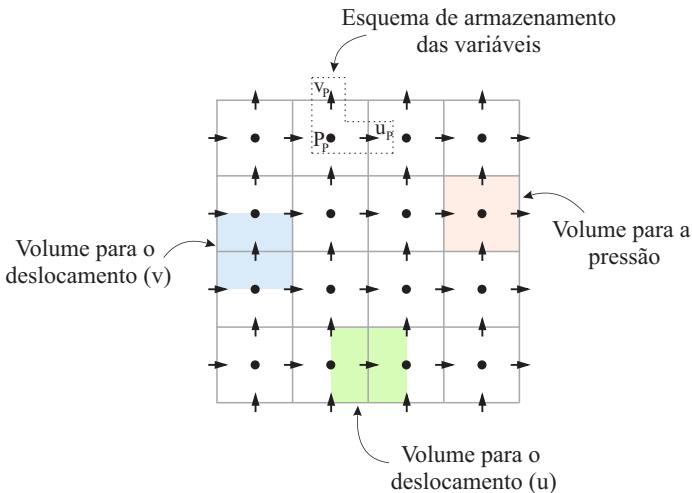
Assim, neste capítulo será apresentada de forma detalhada a obtenção das equações algébricas aplicando o método dos volumes finitos. Mostrando a integração das equações governantes, aproximação dos fluxos nas interfaces dos volumes de controle e a implementação das condições de contorno. Para o modelo geomecânico, será apresentada a maneira adequada de realizar a integração usando o MVE, mostrando as diferenças em realizar a integração considerando a forma conservativa e não conservativa das equações de equilíbrio de tensões.

Vale ressaltar que as equações dos modelos de reservatório e geomecânico serão resolvidas numericamente de maneira parcialmente aco-

pladas, ou seja, separadamente para cada nível de tempo. Assim, cada modelo resultará em um sistema linear de equações algébricas. O método de acoplamento proposto neste trabalho é o acoplamento iterativo, similar ao mostrado na seção 4.2.3, e apresentado em mais detalhes na seção 5.6, onde os parâmetros de acoplamento são a pressão do fluido, a porosidade e a deformação volumétrica. A malha computacional empregada aqui é uma malha cartesiana, porém esta metodologia pode ser adaptada para malhas não estruturadas.

## 5.1 Arranjo das variáveis na malha

O arranjo das variáveis na malha é a posição relativa o qual as variáveis do problema ocupam na malha computacional. Para malhas cartesianas, podem ser empregados os arranjos co-localizado e o desencontrado. De forma sucinta, o arranjo co-localizado é aquele em que todas as variáveis estão sendo calculadas no mesmo ponto da malha, ou seja, todas usam o mesmo volume de controle. Já no desencontrado, como o próprio nome sugere, as variáveis encontram-se deslocadas umas das outras na malha, sendo calculadas em volumes de controle diferentes. Os prós e contras destes arranjos são bem esclarecidos em Maliska [21].



**Figura 5.1** – Arranjo de variáveis desencontrado.

No presente trabalho é empregado o arranjo desencontrado, onde as incógnitas  $u$ ,  $v$  e  $p$  do problema, estão dispostas na malha conforme Figura 5.1. Este arranjo é vantajoso nesta aplicação por evitar interpolações entre os parâmetros de acoplamento. Pois, para o cálculo da deformação volumétrica, que está armazenada no mesmo ponto que a pressão, é necessário que os deslocamentos  $u$  e  $v$  estejam localizados nas faces dos volumes de controle destas variáveis, os quais, são as posições em que  $u$  e  $v$  são calculados neste arranjo, portanto não é necessário interpolá-los. Além disso, para o cálculo dos deslocamentos, é preciso que a pressão esteja localizada nas fronteiras dos seus volumes de controle, o qual é o local onde esta ocupa na malha principal, logo, também não é requerida a interpolação. As vantagens deste arranjo ficarão mais claras na discretização das equações governantes, no momento de aproximar as derivadas nas fronteiras dos volumes de controle.

Assim, através do arranjo desencontrado podemos imaginar três malhas distintas, a malha principal, usada para calcular a variável pressão, e duas malhas auxiliares utilizadas apenas para o cálculo dos deslocamentos  $u$  e  $v$ . Cabe salientar também que as variáveis porosidade, deformação volumétrica, tensões totais e tensões efetivas estão armazenadas no mesmo ponto da pressão, sendo assim, calculadas na malha principal. O esquema de indexação das variáveis na malha aqui empregado é o *boomerang* mostrado na Figura 5.1.

## 5.2 Discretização das equações governantes

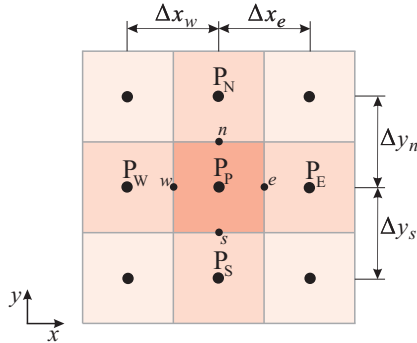
A discretização das equações é realizada aplicando o método dos volumes finitos, o qual caracteriza-se por utilizar as equações governantes na forma conservativa e integrá-las ao longo do espaço e do tempo. Esta discretização resulta em um sistema de equações algébricas, envolvendo as incógnitas avaliadas em nível discreto no domínio de solução. Nesta seção são obtidas as equações aproximadas para volumes de controle genéricos, ou seja, suas faces não são coincidentes com as fronteiras do domínio.

### 5.2.1 Modelo de reservatório

A integração da equação da conservação da massa, equação 3.58<sup>1</sup>, é feita no espaço e no intervalo de tempo  $\Delta t = t_n - t_{n-1}$ . Assim, integrando para o volume de controle  $P$ , ilustrado na Figura 5.2, obtém-se

$$\begin{aligned}
 & \int_{t_{n-1}}^{t_n} \int_w^e \int_s^n [\phi c_f + c_s(\alpha - \phi)] \frac{\partial p}{\partial t} dx dy dt \\
 & - \int_{t_{n-1}}^{t_n} \int_w^e \int_s^n \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{K}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x} \right] dx dy dt \\
 & - \int_{t_{n-1}}^{t_n} \int_w^e \int_s^n \frac{\partial}{\partial y} \left[ \frac{K}{\mu} \left( \frac{\partial p}{\partial y} - \rho_f g \right) \right] dx dy dt \\
 & = - \int_{t_{n-1}}^{t_n} \int_w^e \int_s^n \tilde{q} dx dy dt - \int_{t_{n-1}}^{t_n} \int_w^e \int_s^n \alpha \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} dx dy dt
 \end{aligned} \tag{5.1}$$

resultando em,



**Figura 5.2** – Volume de controle  $P$  para a variável pressão e seus vizinhos.

<sup>1</sup>Assume-se neste momento que o campo gravitacional está atuando na direção  $y$  do sistema de coordenadas, assim, daqui em diante será considerada apenas a componente  $y$  do vetor gravidade  $\mathbf{g}$ , sendo esta componente denotada apenas por  $g$ .



$$\begin{aligned}
& [(\phi^\theta c_f + c_s(\alpha - \phi^\theta))(p - p^o)] \Delta x \Delta y = \left[ \frac{K}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x} \Big|_e^\theta - \frac{K}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x} \Big|_w^\theta \right] \Delta y \Delta t \\
& + \left[ \frac{K}{\mu} \frac{\partial p}{\partial y} \Big|_n^\theta - \frac{K}{\mu} \frac{\partial p}{\partial y} \Big|_s^\theta \right] \Delta x \Delta t - \left[ \frac{K}{\mu} \rho_f g \Big|_n^\theta - \frac{K}{\mu} \rho_f g \Big|_s^\theta \right] \Delta x \Delta t \quad (5.2) \\
& - \tilde{q} \Delta x \Delta y \Delta t - \alpha [\varepsilon - \varepsilon^o] \Delta x \Delta y
\end{aligned}$$

onde, adota-se a convenção de não usar sobrescrito para o nível de tempo atual ( $t_n$ ), e usar o sobrescrito “o” para o nível de tempo anterior ou inicial ( $t_{n-1}$ ). Para os termos com sobrescrito “ $\theta$ ”, estes são avaliados durante algum instante no intervalo de tempo  $\Delta t$ . A avaliação destes termos em diferentes níveis de tempo dar-se-á origem as formulações explícita, implícita e totalmente implícita, bem esclarecidas em Maliska [21]. Neste trabalho iremos adotar a formulação totalmente implícita, onde as variáveis com sobrescrito “ $\theta$ ” são avaliadas no nível de tempo atual.

Cabe observar em 5.2 que a porosidade, definida como um parâmetro de acoplamento da solução iterativa, é uma variável dependente da pressão e da deformação volumétrica. Assim, esta não-linearidade é resolvida atualizando a porosidade com sua equação de restrição, equação 3.52, dada na forma discreta por

$$\phi^{k+1} = \phi^o + (\alpha - \phi^o) [\varepsilon^k - \varepsilon^o] + c_s(\alpha - \phi^o) [p^k - p^o] \quad (5.3)$$

onde  $k$  representa cada iteração da solução do acoplamento para um determinado nível de tempo.

A aproximação das derivadas da pressão nas faces do volume de controle em função dos valores nodais é realizada com as funções de interpolação. Assim, devido a característica elíptica dos termos avaliados, podemos empregar funções de interpolação lineares, tais como diferenças centrais, com isso as derivadas podem ser expressas por

$$\frac{\partial p}{\partial x} \Big|_e = \frac{p_E - p_P}{\Delta x_e} \quad (5.4)$$

$$\frac{\partial p}{\partial x} \Big|_w = \frac{p_P - p_W}{\Delta x_w} \quad (5.5)$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} \Big|_n = \frac{p_N - p_P}{\Delta y_n} \quad (5.6)$$

$$\left. \frac{\partial p}{\partial y} \right|_s = \frac{p_P - p_S}{\Delta y_s} \quad (5.7)$$

Substituindo 5.4 a 5.7 em 5.2 e reagrupando os termos, obtém-se a equação do modelo de reservatório na forma discreta para um volume de controle  $P$ , dada por

$$A_p^p p_P = A_e^p p_E + A_w^p p_W + A_n^p p_N + A_s^p p_S + B_p^p \quad (5.8)$$

onde os coeficientes são definidos por

$$A_e^p = \frac{K}{\mu \Delta x} \Big|_e \Delta y \quad (5.9)$$

$$A_w^p = \frac{K}{\mu \Delta x} \Big|_w \Delta y \quad (5.10)$$

$$A_n^p = \frac{K}{\mu \Delta y} \Big|_n \Delta x \quad (5.11)$$

$$A_s^p = \frac{K}{\mu \Delta y} \Big|_s \Delta x \quad (5.12)$$

$$B_p^p = (\phi c_f + c_s(\alpha - \phi)) p^o \frac{\Delta x \Delta y}{\Delta t} - \bar{q} \Delta x \Delta y - \alpha [\varepsilon - \varepsilon^o] \frac{\Delta x \Delta y}{\Delta t} \quad (5.13)$$

$$A_p^p = A_e^p + A_w^p + A_n^p + A_s^p + (\phi c_f + c_s(\alpha - \phi)) \frac{\Delta x \Delta y}{\Delta t} \quad (5.14)$$

Observa-se que a deformação volumétrica  $\varepsilon$  avaliada no nível de tempo atual, está armazenada dentro do termo independente  $B_p^p$ . Isso deve-se ao fato, de no momento em que o modelo de reservatório está sendo resolvido, o valor da deformação já é conhecido, pois este foi calculado na solução do modelo geomecânico e após repassado ao modelo de reservatório.

## 5.2.2 Modelo geomecânico

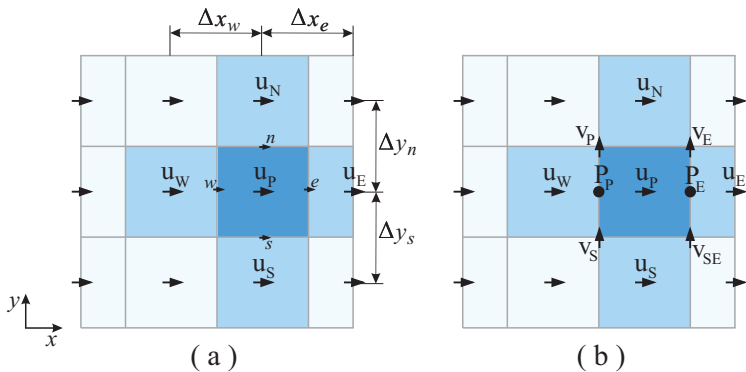
As equações do modelo geomecânico que descrevem o estado de tensões na rocha são tradicionalmente resolvidas pelo método dos elementos finitos, porém, estas também podem ser resolvidas pelo método dos volumes finitos, desde que estas equações sejam integradas de maneira

adequada. Assim, buscando discutir sobre este assunto, estas equações serão integradas de duas formas que são normalmente encontradas na literatura, conservativa e não-conservativa. Com isso, podemos identificar as diferenças dos coeficientes das equações discretas obtidos nas duas formas e reforçar a importância em integrar as equações na forma conservativa quando está sendo usado o MVE. Nesta seção, também será realizada a integração para volumes de controle genéricos.

### 5.2.2.1 Forma conservativa

Por definição, forma conservativa é aquela em que na equação diferencial os fluxos estão dentro do sinal da derivada e, na primeira integração, aparecem os fluxos nas fronteiras do volume elementar, equivalente, portanto, ao balanço [21]. Desta forma, o modelo geomecânico está expresso na forma conservativa em 3.2, onde os fluxos seriam as tensões totais normais e cisalhantes. Assim, estas equações necessitam ser integradas no espaço antes das expressões das tensões 3.4 serem substituídas nas equações de equilíbrio 3.2.

Integrando primeiramente a equação de equilíbrio na direção  $x$ , para o volume de controle  $P$  ilustrado na Figura 5.3 (a), tem-se



**Figura 5.3** – (a) Volume de controle  $P$  para a variável  $u$  e seus vizinhos. (b) Posição das variáveis conectas a  $u_P$ .

$$\int_w^e \int_s^n \frac{\partial}{\partial x} (\sigma_{xx}) dx dy + \int_w^e \int_s^n \frac{\partial}{\partial y} (\sigma_{xy}) dx dy = 0 \quad (5.15)$$

resultanto em

$$[\sigma_{xx}|_e - \sigma_{xx}|_w] \Delta y + [\sigma_{xy}|_n - \sigma_{xy}|_s] \Delta x = 0 \quad (5.16)$$

Nota-se que os fluxos aparecem naturalmente nas faces do volume de controle, reproduzindo o balanço que foi utilizado para deduzir as equações diferenciais, e desta forma, garante a conservação da propriedade em nível de volume elementar. Quanto as propriedades físicas, estas também estão sendo avaliadas nas faces do volume controle, no mesmo ponto onde estão sendo calculados os fluxos.

Após a integração, é que podemos substituir em 5.16 as tensões em função dos deslocamentos, os quais são definidas por

$$\sigma_{xx}|_e = \left[ \lambda \frac{1-\nu}{\nu} \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_e + \lambda \frac{\partial v}{\partial y} \Big|_e \right] - \alpha p|_e \quad (5.17)$$

$$\sigma_{xx}|_w = \left[ \lambda \frac{1-\nu}{\nu} \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_w + \lambda \frac{\partial v}{\partial y} \Big|_w \right] - \alpha p|_w \quad (5.18)$$

$$\sigma_{xy}|_n = \left[ G \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_n + G \frac{\partial v}{\partial x} \Big|_n \right] \quad (5.19)$$

$$\sigma_{xy}|_s = \left[ G \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_s + G \frac{\partial v}{\partial x} \Big|_s \right] \quad (5.20)$$

obtendo

$$\begin{aligned} & \left[ \left( \lambda \frac{1-\nu}{\nu} \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_e + \lambda \frac{\partial v}{\partial y} \Big|_e \right) - \left( \lambda \frac{1-\nu}{\nu} \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_w + \lambda \frac{\partial v}{\partial y} \Big|_w \right) \right] \Delta y \\ & + \left[ \left( G \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_n + G \frac{\partial v}{\partial x} \Big|_n \right) - \left( G \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_s + G \frac{\partial v}{\partial x} \Big|_s \right) \right] \Delta x = [\alpha p|_e - \alpha p|_w] \Delta y \end{aligned} \quad (5.21)$$

onde as derivadas na equação acima, as quais aparecem nas faces do volume de controle, podem ser aproximadas por diferenças centrais, usando os valores das variáveis dispostos na Figura 5.3 (b), assim

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_e = \frac{u_E - u_P}{\Delta x_e} \quad (5.22)$$

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_w = \frac{u_P - u_W}{\Delta x_w} \quad (5.23)$$

$$\left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_n = \frac{u_N - u_P}{\Delta y_n} \quad (5.24)$$

$$\left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_s = \frac{u_P - u_S}{\Delta y_s} \quad (5.25)$$

$$\left. \frac{\partial v}{\partial x} \right|_n = \frac{v_E - v_P}{\Delta x} \quad (5.26)$$

$$\left. \frac{\partial v}{\partial x} \right|_s = \frac{v_{SE} - v_S}{\Delta x} \quad (5.27)$$

$$\left. \frac{\partial v}{\partial y} \right|_e = \frac{v_E - v_{SE}}{\Delta y} \quad (5.28)$$

$$\left. \frac{\partial v}{\partial y} \right|_w = \frac{v_P - v_S}{\Delta y} \quad (5.29)$$

Neste momento, cabe fazer algumas considerações referente a variável pressão da equação 5.21. Primeiro, os valores da pressão  $p|_e$  e  $p|_w$  não precisam ser interpolados, pois estes estão localizados no mesmo ponto onde a pressão é calculada no modelo de reservatório, assim conforme o esquema de armazenamento de variáveis na malha mostrado na Figura 5.1, tem-se  $p|_e = p_E$  e  $p|_w = p_P$ , esta é uma vantagem de estar usando o arranjo desconstruído. Além disso, devido estarmos usando um método de acoplamento iterativo, quando as equações da geomecânica estão sendo resolvidas, o valor da pressão já é conhecido, pois este foi encontrado no simulador de reservatório e repassado para o geomecânico, assim  $p$  não é incógnita e ficará armazenada no termo independente da equação discreta.

Assim, substituindo as derivadas 5.22 a 5.29 em 5.21, e reagrupando os termos, obtém-se a equação discreta para o deslocamento  $u$  na forma

$$\begin{aligned}
A_p^{uu} u_P &= A_e^{uu} u_E + A_w^{uu} u_W + A_n^{uu} u_N + A_s^{uu} u_S + \\
&\quad A_p^{uv} v_P + A_e^{uv} v_E + A_s^{uv} v_S + A_{se}^{uv} v_{SE} + B_p^u
\end{aligned} \tag{5.30}$$

onde os coeficientes são dados por

$$A_e^{uu} = \frac{\lambda(1-\nu)}{\nu \Delta x} \Big|_e \Delta y \tag{5.31}$$

$$A_w^{uu} = \frac{\lambda(1-\nu)}{\nu \Delta x} \Big|_w \Delta y \tag{5.32}$$

$$A_n^{uu} = \frac{G}{\Delta y} \Big|_n \Delta x \tag{5.33}$$

$$A_s^{uu} = \frac{G}{\Delta y} \Big|_s \Delta x \tag{5.34}$$

$$A_p^{uu} = A_e^{uu} + A_w^{uu} + A_n^{uu} + A_s^{uu} \tag{5.35}$$

$$A_p^{uv} = -\lambda \Big|_w - G \Big|_n \tag{5.36}$$

$$A_{se}^{uv} = -\lambda \Big|_e - G \Big|_s \tag{5.37}$$

$$A_e^{uv} = \lambda \Big|_e + G \Big|_n \tag{5.38}$$

$$A_s^{uv} = \lambda \Big|_w + G \Big|_s \tag{5.39}$$

$$B_p^u = - \left[ \alpha \Big|_e p_E - \alpha \Big|_w p_P \right] \Delta y \tag{5.40}$$

Da mesma forma que foi realizada para a direção  $x$ , agora vamos integrar a equação de equilíbrio na direção  $y$ , para o volume de controle  $p$  mostrado na Figura 5.4 (a),

$$\int_w^e \int_s^n \frac{\partial}{\partial x} (\sigma_{yx}) dx dy + \int_w^e \int_s^n \frac{\partial}{\partial y} (\sigma_{yy}) dx dy + \int_w^e \int_s^n \rho g dx dy = 0 \quad (5.41)$$

obtendo

$$[\sigma_{yx}|_e - \sigma_{yx}|_w] \Delta y + [\sigma_{yy}|_n - \sigma_{yy}|_s] \Delta x + \rho g \Delta x \Delta y = 0 \quad (5.42)$$

onde as tensões nas faces do volume de controle são definidas por

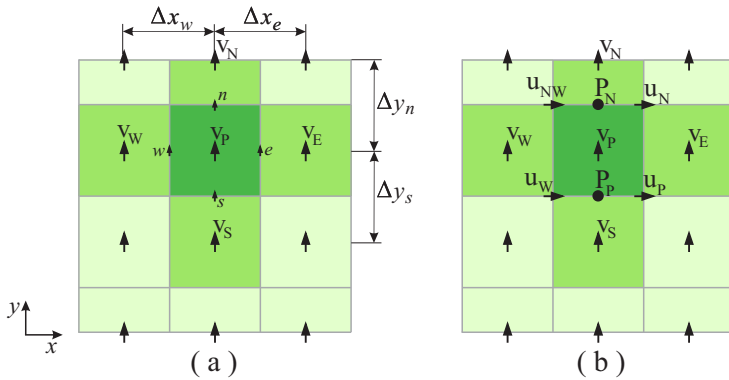
$$\sigma_{yx}|_e = \left[ G \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_e + G \frac{\partial v}{\partial x} \Big|_e \right] \quad (5.43)$$

$$\sigma_{yx}|_w = \left[ G \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_w + G \frac{\partial v}{\partial x} \Big|_w \right] \quad (5.44)$$

$$\sigma_{yy}|_n = \left[ \lambda \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_n + \lambda \frac{1-\nu}{\nu} \frac{\partial v}{\partial y} \Big|_n \right] - \alpha p|_n \quad (5.45)$$

$$\sigma_{yy}|_s = \left[ \lambda \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_s + \lambda \frac{1-\nu}{\nu} \frac{\partial v}{\partial y} \Big|_s \right] - \alpha p|_s \quad (5.46)$$

substituindo estas em 5.42, tem-se



**Figura 5.4** – (a) Volume de controle  $P$  para a variável  $v$  e seus vizinhos. (b) Posição das variáveis conectas a  $v_p$ .

$$\begin{aligned}
& \left[ \left( \lambda \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_n + \lambda \frac{1-\nu}{\nu} \frac{\partial v}{\partial y} \Big|_n \right) - \left( \lambda \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_s + \lambda \frac{1-\nu}{\nu} \frac{\partial v}{\partial y} \Big|_s \right) \right] \Delta x \\
& + \left[ \left( G \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_e + G \frac{\partial v}{\partial x} \Big|_e \right) - \left( G \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_w + G \frac{\partial v}{\partial x} \Big|_w \right) \right] \Delta y \\
& + \rho g \Delta x \Delta y = [\alpha p|_n - \alpha p|_s] \Delta y
\end{aligned} \tag{5.47}$$

Aplicando diferenças centrais com as variáveis localizadas na Figura 5.4 (b), as derivadas da equação acima podem ser aproximadas na forma

$$\frac{\partial v}{\partial x} \Big|_e = \frac{v_E - v_P}{\Delta x_e} \tag{5.48}$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} \Big|_w = \frac{v_P - v_W}{\Delta x_w} \tag{5.49}$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} \Big|_n = \frac{v_N - v_P}{\Delta y_n} \tag{5.50}$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} \Big|_s = \frac{v_P - v_S}{\Delta y_s} \tag{5.51}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} \Big|_e = \frac{u_N - u_P}{\Delta y} \tag{5.52}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} \Big|_w = \frac{u_{NW} - u_W}{\Delta y} \tag{5.53}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} \Big|_n = \frac{u_N - u_{NW}}{\Delta x} \tag{5.54}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} \Big|_s = \frac{u_P - u_W}{\Delta x} \tag{5.55}$$

Com isso, substituindo 5.48 a 5.55 em 5.47, obtém-se a equação na forma discreta para o deslocamento  $v$ ,

$$\begin{aligned}
A_p^{vv} v_P &= A_e^{vv} v_E + A_w^{vv} v_W + A_n^{vv} v_N + A_s^{vv} v_S + \\
& A_p^{vu} u_P + A_w^{vu} u_W + A_n^{vu} u_N + A_{nw}^{vu} u_{NW} + B_p^v
\end{aligned} \tag{5.56}$$



onde os coeficientes são definidos por

$$A_e^{vv} = \frac{G}{\Delta x} \Big|_e \Delta y \quad (5.57)$$

$$A_w^{vv} = \frac{G}{\Delta x} \Big|_w \Delta y \quad (5.58)$$

$$A_n^{vv} = \frac{\lambda(1-\nu)}{\nu \Delta y} \Big|_n \Delta x \quad (5.59)$$

$$A_s^{vv} = \frac{\lambda(1-\nu)}{\nu \Delta y} \Big|_s \Delta x \quad (5.60)$$

$$A_p^{vv} = A_e^{vv} + A_w^{vv} + A_n^{vv} + A_s^{vv} \quad (5.61)$$

$$A_p^{vu} = -\lambda \Big|_s - G \Big|_e \quad (5.62)$$

$$A_{nw}^{vu} = -\lambda \Big|_n - G \Big|_w \quad (5.63)$$

$$A_w^{vu} = \lambda \Big|_s + G \Big|_w \quad (5.64)$$

$$A_n^{vu} = \lambda \Big|_n + G \Big|_e \quad (5.65)$$

$$B_p^v = - \left[ \alpha \Big|_n p_N - \alpha \Big|_s p_P \right] \Delta x \quad (5.66)$$

Portanto, 5.30 e 5.56 são as equações aproximadas que descrevem o modelo geomecânico quando suas equações diferenciais são integradas na forma conservativa.

### 5.2.2.2 Forma não-conservativa

Um dos principais cuidados no uso do método dos volumes finitos é realizar a integração das equações na forma conservativa, para garantir a conservação dos fluxos em nível de volumes elementares, porém, nem sempre este cuidado é tomado. Assim, para evidenciar as discrepâncias causadas na integração não-conservativa, a equação de equilíbrio na dire-

ção  $x$  é integrada como exemplo. Esta equação está apresentada na forma não-conservativa em 3.8, tal forma que é bastante encontrada na literatura. Após colecionar os termos repetidos desta e integrá-la no espaço, obtém-se

$$\begin{aligned} & \int_w^e \int_s^n \frac{\partial}{\partial x} \left( \lambda \frac{1-\nu}{\nu} \frac{\partial u}{\partial x} \right) dx dy + \int_w^e \int_s^n \frac{\partial}{\partial y} \left( G \frac{\partial u}{\partial y} \right) dx dy \\ & + \int_w^e \int_s^n \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{G}{1-2\nu} \frac{\partial v}{\partial y} \right) dx dy = \int_w^e \int_s^n \frac{\partial}{\partial x} (\alpha p) dx dy \end{aligned} \quad (5.67)$$

resultando em,

$$\begin{aligned} & \left[ \lambda \frac{1-\nu}{\nu} \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_e - \lambda \frac{1-\nu}{\nu} \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_w \right] \Delta y + \left[ G \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_n - G \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_s \right] \Delta x \\ & + \left[ \frac{G}{1-2\nu} \frac{\partial v}{\partial y} \Big|_e - \frac{G}{1-2\nu} \frac{\partial v}{\partial y} \Big|_w \right] \Delta y = [\alpha p|_e - \alpha p|_w] \Delta y \end{aligned} \quad (5.68)$$

Buscando tentar reproduzir os fluxos em cada face do volume de controle, vamos reagrupar os termos da equação acima pertencentes a cada face, assim

$$\begin{aligned} & \overbrace{\left[ \left( \lambda \frac{1-\nu}{\nu} \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_e + \frac{G}{1-2\nu} \frac{\partial v}{\partial y} \Big|_e - \alpha p \Big|_e \right)}^{\neq \sigma_{xx}|_e} \\ & - \overbrace{\left[ \left( \lambda \frac{1-\nu}{\nu} \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_w + \frac{G}{1-2\nu} \frac{\partial v}{\partial y} \Big|_w - \alpha p \Big|_w \right)}^{\neq \sigma_{xx}|_w} \right] \Delta y \\ & + \underbrace{\left[ G \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_n \right]}_{\neq \sigma_{xy}|_n} - \underbrace{\left[ G \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_s \right]}_{\neq \sigma_{xy}|_s} \Delta x = 0 \end{aligned} \quad (5.69)$$

Observa-se que os termos destacados na equação anterior, não representam os fluxos de quantidade de movimento em nível de volume elementar, mostrados em 5.17 a 5.20. Portanto, isso poderá acarretar sérios danos à convergência da solução e a precisão dos valores locais da propriedade calculada.

Seguindo na obtenção da equação aproximada para  $u$ , necessita-se substituir as derivadas 5.22 a 5.29 na equação acima, resultando em

$$A_p^{uu} u_P = A_e^{uu} u_E + A_w^{uu} u_W + A_n^{uu} u_N + A_s^{uu} u_S + A_p^{uv} v_P + A_e^{uv} v_E + A_s^{uv} v_S + A_{se}^{uv} v_{SE} + B_p^u \quad (5.70)$$

onde os coeficientes são dados por

$$A_e^{uu} = \lambda \frac{1-\nu}{\nu} \Delta x \Big|_e \Delta y \quad (5.71)$$

$$A_w^{uu} = \lambda \frac{1-\nu}{\nu} \Delta x \Big|_w \Delta y \quad (5.72)$$

$$A_n^{uu} = \frac{G}{\Delta y} \Big|_n \Delta x \quad (5.73)$$

$$A_s^{uu} = \frac{G}{\Delta y} \Big|_s \Delta x \quad (5.74)$$

$$A_p^{uu} = A_e^{uu} + A_w^{uu} + A_n^{uu} + A_s^{uu} \quad (5.75)$$

$$A_p^{uv} = -\frac{G}{1-2\nu} \Big|_w \quad (5.76)$$

$$A_{se}^{uv} = -\frac{G}{1-2\nu} \Big|_e \quad (5.77)$$

$$A_e^{uv} = \frac{G}{1-2\nu} \Big|_e \quad (5.78)$$

$$A_s^{uv} = \frac{G}{1-2\nu} \Big|_w \quad (5.79)$$

$$B_p^u = - \left[ \alpha|_e p_E - \alpha|_w p_P \right] \Delta y \quad (5.80)$$

Nota-se que os coeficientes encontrados não são iguais aos obtidos na forma conservativa, como era o esperado. A diferença está ocorrendo nos coeficientes  $A_p^{uv}$ ,  $A_{se}^{uv}$ ,  $A_e^{uv}$  e  $A_s^{uv}$ , que são os coeficientes da variável  $v$  para a equação de equilíbrio na direção  $x$ . Pegando como exemplo para comparação  $A_p^{uv}$ ,

$$\begin{aligned} A_p^{uv} &= -\lambda|_w - G|_n \quad (\text{Forma conservativa}) \\ A_p^{uv} &= -\frac{G}{1-2\nu}|_w \quad (\text{Forma não-conservativa}) \end{aligned}$$

tem-se que algebricamente, as expressões se equivalem, pois

$$\lambda + G = \frac{2G\nu}{1-2\nu} + G = \frac{G}{1-2\nu}$$

porém, as propriedades físicas estão sendo calculadas em locais diferentes no volume de controle. Na forma conservativa, as propriedades estão sendo avaliadas no mesmo local de avaliação dos fluxos, ou seja,  $\lambda$  está avaliada na face  $w$ , face esta que está sendo calculado o fluxo  $\sigma_{xx}$ , e  $G$  é avaliado na face  $n$ , face onde é calculado o fluxo  $\sigma_{xy}$ . Enquanto que na forma não-conservativa, a soma  $\lambda + G$  está sendo avaliada em uma mesma face, face  $w$ , não correspondendo a mesma posição de avaliação dos fluxos, desta forma, está sendo violada uma das premissas básicas do método dos volumes finitos, que diz, os valores das propriedades físicas devem ser avaliadas no mesmo local de avaliação dos fluxos [21].

## 5.3 Implementação das condições de contorno

Na seção anterior foram obtidas as equações aproximadas para volumes de controle genéricos, ou seja, volumes que não apresentam faces coincidentes com as fronteiras do domínio. Assim, para o sistema de equações algébricas ficar completo, as equações dos volumes de fronteira necessitam ser modificadas para incorporar as condições de contorno do problema físico, tal tarefa, será realizada para cada modelo nesta seção.

### 5.3.1 Modelo de reservatório

Da mesma forma como foi realizado para os volumes internos, as equações discretas para os volumes da fronteira do modelo de reservatório serão obtidas realizando a integração da equação da conservação 3.58. Para demonstrar esta operação, vamos usar uma fronteira do domínio como exemplo, pois este mesmo procedimento deverá ser realizado para todas as fronteiras do domínio físico. Assim, a Figura 5.5 mostra volumes de controle adjacentes a uma fronteira para os dois tipos de condições de contorno abordados neste trabalho, (a) pressão prescrita e (b) fluxo prescrito.

- **Pressão prescrita**

Para o caso de pressão prescrita na fronteira, a equação aproximada para o volume de controle  $P$  ilustrado na Figura 5.5 (a) é obtida alterando o termo do fluxo de massa na face  $w$  do volume de controle, de tal forma

$$\dot{m}_f = \frac{K}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x} \Big|_w = \frac{K}{\mu} \Big|_w \frac{(p_P - p_f)}{\Delta x_f} \quad (5.81)$$

resultando em uma equação aproximada na forma

$$A_p^p p_P = A_e^p p_E + A_n^p p_N + A_s^p p_S + B_p^p \quad (5.82)$$

onde o termos

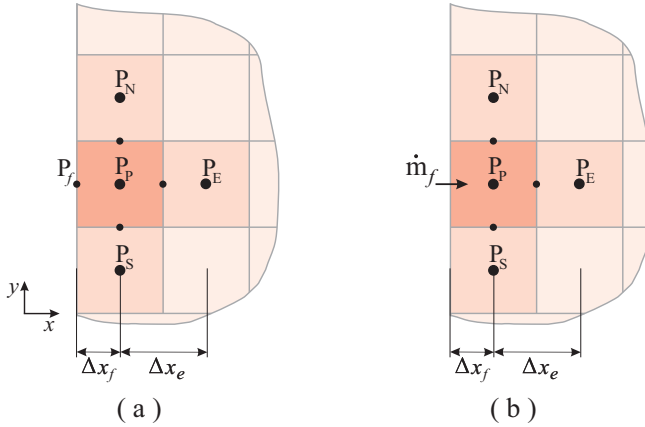
$$\frac{K}{\mu} \Big|_w \frac{1}{\Delta x_f} \quad \text{e} \quad \frac{K}{\mu} \Big|_w \frac{p_f}{\Delta x_f}$$

ficam armazenados em  $A_p^p$  e no termo independente  $B_p^p$ , respectivamente. Quanto aos outros coeficientes de 5.82, estes são idênticos aos encontrados na seção 5.2.

- **Fluxo prescrito**

Neste caso, tem-se a condição de contorno natural do método dos volumes finitos. Assim, basta substituir  $\dot{m}_f$  pelo valor prescrito do fluxo, ou seja,

$$\dot{m}_f = \text{valor conhecido} \quad (5.83)$$



**Figura 5.5** – Volume de controle adjacente à fronteira. (a) Pressão prescrita. (b) Fluxo prescrito.

com isso, a equação discreta obtida é da mesma forma de 5.82, onde agora, o termo independente  $B_p^p$  está agregando o valor de  $\dot{m}_f$ , permanecendo os outros coeficientes desta iguais aos obtidos para os volumes genéricos.

Um caso particular desta condição de contorno é para o caso de fronteira impermeável, o qual não ocorre fluxo de massa através das fronteiras do domínio. Para este fim, simplesmente considera  $\dot{m}_f = 0$  na equação discretizada.

### 5.3.2 Modelo geomecânico

Na discretização do modelo geomecânico deste trabalho, há uma particularidade com os volumes de controle das fronteiras, pois devido estar usando o arranjo desencontrado, tem-se nas fronteiras a origem de meio-volumes de controle, como pode ser visto na Figura 5.1, desta forma, o ponto central do volume de controle está localizado sobre a fronteira. Cabe observar, que os meio-volumes aparecem na malha para o deslocamento horizontal  $u$ , somente nas fronteiras esquerda e direita do domínio, enquanto na malha para o deslocamento vertical  $v$ , somente nas fronteiras superior e inferior do domínio. Assim, para apresentar o procedimento empregado neste trabalho para incorporar as condições de contorno, será usada como exemplo a equação de equilíbrio na direção  $x$  para uma determinada fronteira.

### • Deslocamento prescrito

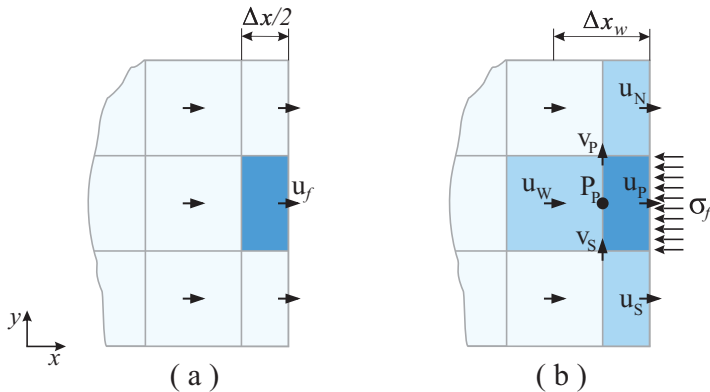
Na Figura 5.6 (a) está sendo aplicada a condição de contorno de deslocamento prescrito, condição de Dirichlet. Neste tipo de condição, a variável conhecida está sendo alocada sobre a fronteira, ou seja, coincidente com o ponto central do volume de controle. Nesta situação, não é realizado um balanço neste volume de controle, e a equação aproximada para este é dada por

$$A_p^{uu} u_p = B_p^u \quad (5.84)$$

onde

$$A_p^{uu} = 1 \quad \text{e} \quad B_p^u = u_f \quad (5.85)$$

Desta forma, a inclusão da condição de contorno de deslocamento prescrito para um volume de fronteira no sistema linear é realizada substituindo todas as células da  $f$ -ésima linha da matriz de coeficientes por valores nulos, exceto a célula da diagonal, que deve ser igual a um. Além disso, a posição  $f$  do vetor de termos independentes deve ser alocada com o valor do deslocamento prescrito.



**Figura 5.6** – Meio volume de controle adjacente à fronteira. (a) Deslocamento prescrito. (b) Tensão normal prescrita.

### • Tensão normal prescrita

Para a condição de contorno de tensão prescrita, condição de Neumann, não ocorre a mesma facilidade ao da condição de Dirichlet, pois neste caso, deve ser realizado um balanço no meio volume da fronteira. Assim, integrando a equação de equilíbrio na direção  $x$ , para o volume de fronteira  $P$  exibido na Figura 5.6 (b), obtém-se a equação aproximada na forma

$$\left[ \sigma_{xx} \Big|_e - \sigma_{xx} \Big|_w \right] \Delta y + \left[ \sigma_{xy} \Big|_n - \sigma_{xy} \Big|_s \right] \frac{\Delta x}{2} = 0 \quad (5.86)$$

a qual incide na condição de contorno natural do MVE, fluxo prescrito na fronteira, pois  $\sigma_f$  representa o fluxo de quantidade de movimento através da fronteira  $e$ . Assim, para incorporar esta condição na equação aproximada, basta fazer

$$\sigma_{xx} \Big|_e = -\sigma_f \quad (5.87)$$

onde o sinal negativo surge da convenção de sinais, a qual é adotada negativa para tensões de compressão. Repetindo os mesmos passos descritos da seção 5.2 para as outras tensões da equação 5.86, obtém-se a seguinte equação aproximada

$$A_p^{uu} u_p = A_w^{uu} u_w + A_n^{uu} u_n + A_s^{uu} u_s + A_p^{uv} v_p + A_s^{uv} v_s + B_p^u \quad (5.88)$$

onde os coeficientes são dados por

$$A_w^{uu} = \frac{\lambda(1-\nu)}{\nu \Delta x} \Big|_w \Delta y \quad (5.89)$$

$$A_n^{uu} = \frac{G}{\Delta y} \Big|_n \frac{\Delta x}{2} \quad (5.90)$$

$$A_s^{uu} = \frac{G}{\Delta y} \Big|_s \frac{\Delta x}{2} \quad (5.91)$$

$$A_p^{uu} = A_e^{uu} + A_w^{uu} + A_n^{uu} + A_s^{uu} \quad (5.92)$$

$$A_p^{uv} = -\lambda \Big|_w \quad (5.93)$$



$$A_s^{uv} = \lambda \Big|_w \quad (5.94)$$

$$B_p^u = \alpha \Big|_w p_P \Delta y - \sigma_f \Delta y \quad (5.95)$$

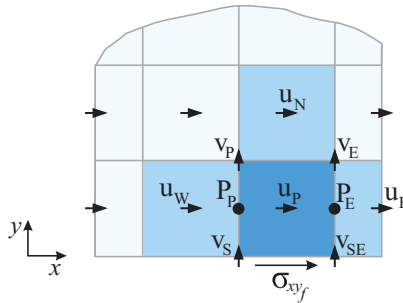
- **Tensão cisalhante prescrita**

Da mesma forma como foi realizada a dedução das equações diferenciais de equilíbrio a partir de um volume elementar, conforme mostrado na Figura 2.1, a qual considerou além dos fluxos normais as fronteiras do volume, os fluxos cisalhantes, a equação aproximada dos volumes de controle adjacentes à fronteira também deve incorporar esta condição de contorno de fluxo cisalhante do problema físico. Assim, pegando como exemplo a equação de equilíbrio na direção  $x$ , as equações aproximadas dos volumes contíguos as fronteiras superior e inferior do domínio devem ser modificadas, afim de incorporar tal condição. Fazendo a integração para o volume de fronteira  $P$  mostrado na Figura 5.7, tem-se

$$[\sigma_{xx}|_e - \sigma_{xx}|_w] \Delta y + [\sigma_{xy}|_n - \sigma_{xy}|_s] \Delta x = 0 \quad (5.96)$$

onde a aplicação da condição de contorno é feita informando o valor conhecido da tensão cisalhante na fronteira, ou seja,

$$\sigma_{xy}|_s = \sigma_{xy_f} \quad (5.97)$$



**Figura 5.7** – Volume de controle adjacente à fronteira para condição de contorno de tensão cisalhante prescrita.

Como em todos os problemas a serem resolvidos neste trabalho, irão assumir a hipótese de não haver atrito nas fronteiras do domínio físico, a qual implica em tensão cisalhante nula nas fronteiras, vamos obter a equação aproximada para este volume considerando  $\sigma_{xy}|_s = 0$ , resultando em

$$\begin{aligned} A_p^{uu} u_P &= A_e^{uu} u_E + A_w^{uu} u_W + A_n^{uu} u_N + A_p^{uv} v_P + \\ &A_e^{uv} v_E + A_s^{uv} v_S + A_{se}^{uv} v_{SE} + B_p^u \end{aligned} \quad (5.98)$$

onde os coeficientes alterados são dados por

$$A_{se}^{uv} = -\lambda|_e \quad (5.99)$$

$$A_s^{uv} = \lambda|_w \quad (5.100)$$

enquanto os outros coeficientes da equação 5.98 mantém-se iguais aos obtidos na discretização para os volumes genéricos.

Seguindo os mesmos passos descritos anteriormente na implementação das condições de contorno também para a equação de equilíbrio na direção  $y$ , obtém-se o sistema completo de equações algébricas do modelo geomecânico.

## 5.4 Montagem dos sistemas lineares de equações

A partir da discretização das equações diferenciais realizada nas seções anteriores, obteve-se as equações aproximadas tanto do modelo geomecânico, quanto do modelo de reservatório. Estas equações estão expressas em função de  $u$ ,  $v$  e  $p$ , que são as variáveis incógnitas do nosso problema. Assim, os valores destas incógnitas são obtidos resolvendo os sistemas lineares formados pelas equações discretizadas associadas a todos os volumes de controle da malha.

Em virtude de estar sendo usado o acoplamento iterativo como estratégia de solução do acoplamento reservatório/geomecânica, no qual, as equações dos modelos de reservatório e geomecânico são resolvidas separadamente a cada nível de tempo, dois sistemas lineares são gerados, um para cada modelo. Para o modelo de reservatório, o sistema linear gerado é escrito na forma matricial por

$$[A^p] [p] = [B^p] \quad (5.101)$$

onde  $[A^p]$  é a matriz dos coeficientes das equações, a qual contempla a variável porosidade, uma não-linearidade associado ao acoplamento reservatório/geomecânica. Como consequência, os coeficientes desta matriz necessitam ser atualizados e iterados a cada nível de tempo.  $[B^p]$  é o vetor que engloba os termos independentes e  $[p]$  o vetor de valores da variável pressão, o qual após solução proporcionará o campo de pressões desejado.

Quanto ao modelo geomecânico, este apresenta duas incógnitas,  $u$  e  $v$ . Assim, este sistema poderia ter sido resolvido de forma segregada, onde haveria um sistema linear para cada variável, um considerando  $u$  na forma implícita, tratando  $v$  explicitamente e outro considerando  $v$  como variável implícita, mantendo  $u$  explícito. Porém, para evitar problemas de instabilidades na solução e como as duas variáveis de deslocamento aparecem implicitamente nas equações de equilíbrio, optou-se em resolver o sistema linear acoplado, podendo ser escrito por

$$\begin{bmatrix} A^{uu} & A^{uv} \\ A^{vu} & A^{vv} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B^u \\ B^v \end{bmatrix} \quad (5.102)$$

o qual forma um sistema de  $2 \times N$  equações a  $2 \times N$  incógnitas, onde  $N$  é o número de volumes de controle da discretização. A estrutura da matriz dos coeficientes é mostrada em 5.103, na qual estão apresentados os coeficientes para um volume de controle genérico  $P$ , sendo a linha superior contendo os coeficientes da equação discreta para  $u$  e a inferior para  $v$ . Observa-se a partir da disposição destes coeficientes para o volume  $P$ , que a matriz dos coeficientes é uma matriz de blocos, com blocos de matrizes  $2 \times 2$ , onde o bloco da diagonal principal contém os coeficientes centrais das variáveis, enquanto os outros blocos da mesma linha armazenam os coeficientes de conexão com os volumes vizinhos. Porém, devido à forma da ocorrência das conectividades de  $u_p$  e  $v_p$  com seus vizinhos, nem todas as matrizes blocos estão completas, difenciando assim de uma configuração normal de 9 pontos. O vetor de valores das variáveis deslocamento  $[u, v]$  apresenta  $N$  componentes do tipo  $\{u, v\}_p$ . O vetor de termos independentes  $[B^u, B^v]$  tem estrutura semelhante ao de incógnitas, e neste está armazenado o valor da variável pressão, devido esta estar sendo tratada de forma explícita.



$$\varepsilon_{xxP} = \frac{u_P - u_W}{\Delta x} \quad (5.104)$$

$$\varepsilon_{yyP} = \frac{v_P - v_S}{\Delta y} \quad (5.105)$$

onde na sequência, a deformação volumétrica é obtida somando as duas parcelas das deformações normais,

$$\varepsilon_{vP} = \varepsilon_{xxP} + \varepsilon_{yyP} \quad (5.106)$$

As tensões totais normais são encontradas substituindo os valores conhecidos das deformações e pressão, conforme expressões abaixo

$$\sigma_{xxP} = \left[ \frac{\lambda(1-\nu)}{\nu} \varepsilon_{xxP} + \lambda \varepsilon_{yyP} \right] - \alpha p_P \quad (5.107)$$

$$\sigma_{yyP} = \left[ \lambda \varepsilon_{xxP} + \frac{\lambda(1-\nu)}{\nu} \varepsilon_{yyP} \right] - \alpha p_P \quad (5.108)$$

Outra variável bastante importante nas análises geomecânicas é a tensão efetiva, a qual representa os esforços atuantes exclusivamente na matriz sólida do meio poroso, assim, suas componentes podem ser calculadas por

$$\sigma'_{xxP} = \frac{\lambda(1-\nu)}{\nu} \varepsilon_{xxP} + \lambda \varepsilon_{yyP} \quad (5.109)$$

$$\sigma'_{yyP} = \lambda \varepsilon_{xxP} + \frac{\lambda(1-\nu)}{\nu} \varepsilon_{yyP} \quad (5.110)$$

## 5.6 Algoritmo de solução

Nesta seção são apresentados os principais passos do algoritmo de solução do acoplamento iterativo empregado neste estudo. Este acoplamento é similar ao apresentado no fluxograma da Figura 4.3, porém, com uma diferença, neste a permeabilidade não é um parâmetro de acoplamento, mantendo-se esta constante ao longo do tempo. Assim, o algoritmo do acoplamento segue os seguintes passos:

1. Calcular as condições iniciais do problema, obtendo a condição de

equilíbrio entre o estado de tensões e o campo de pressão do fluido (específico para cada caso).

2. Avançar no nível de tempo.
3. Calcular os coeficientes da equação 5.8 do modelo de reservatório.
4. Resolver o sistema linear 5.101 e obter  $p$ .
5. Com o valor de  $p$ , calcular os coeficientes das equações 5.30 e 5.56, que descrevem o modelo geomecânico.
6. Resolver o sistema linear 5.102, obtendo os deslocamentos  $u$  e  $v$ .
7. Calcular as deformações pelas expressões 5.104 a 5.106.
8. Com os novos valores das deformações e da pressão, atualizar a porosidade com a equação 5.3.
9. Retornar ao item 3, recalculando os coeficientes com os novos valores de porosidade e deformações. Iterar até a convergência.
10. Calcular as tensões com as equações 5.107 a 5.110.
11. Avançar para novo passo de tempo.

## 5.7 Critério de convergência

O critério de convergência adotado no algoritmo de solução do aco-  
plamento reservatório/geomecânica apresentado anteriormente é o pro-  
posto por Maliska [21]. Este critério consiste em determinar a faixa de  
variação da função no domínio, isto é, o módulo da diferença entre o má-  
ximo e o mínimo valor do campo, e usá-lo como referencial. Para todos  
os problemas aqui resolvidos, a grandeza escolhida para compor o critério  
será a pressão do fluido. Desta forma, o critério é escrito por

$$\left| \frac{p_p^{k+1} - p_p^k}{R} \right| \leq \epsilon \quad (5.111)$$

onde  $R = p_{max} - p_{min}$  e  $\epsilon$  é o critério de convergência propriamente dito,  
o qual neste estudo será empregado o valor de  $10^{-5}$ .

## RESULTADOS E DISCUSSÕES

Neste capítulo são resolvidos diferentes exemplos empregando a formulação numérica apresentada nos capítulos anteriores. Inicialmente são resolvidos dois problemas unidimensionais de poroelasticidade, o primeiro deles é o conhecido problema da coluna de Terzaghi [30] e o segundo é uma modificação deste primeiro, onde a coluna agora é formada por duas rochas com diferentes propriedades físicas [35]. Ambos apresentam solução analítica <sup>1</sup>, assim, estes serão usados para a validação numérica do modelo fazendo a comparação da solução numérica com a solução analítica. Na sequência, é apresentado o problema de Mandel [22], um caso bidimensional que é definido como um *benchmark* na solução de problemas acoplados reservatório/geomecânica. Pois, com este é possível avaliar a robustez do método numérico na solução do acoplamento, verificando se este método é capaz de capturar determinados fenômenos físicos envolvidos na solução deste problema. Após a validação numérica do modelo, um caso mais prático é simulado com o objetivo de demonstrar a aplicabilidade da metodologia numérica desenvolvida. Este último consiste em um domínio de solução contendo o reservatório estando circundado por rochas não reservatório, onde no reservatório estão locados dois poços, um produtor e outro injetor. Com a solução deste problema, será possível realizar uma análise geomecânica um pouco mais geral, constatando e observando o comportamento das principais variáveis envolvidas

---

<sup>1</sup>As soluções analíticas dos problemas propostos estão apresentadas no apêndice C.

na análise.

Os resultados a serem apresentados neste capítulo foram obtidos mediante um código computacional implementado em linguagem de programação C++, no qual para a montagem das matrizes e a solução dos sistemas lineares foram utilizadas classes da biblioteca *mtl* e *itl* [20]. Os sistemas lineares foram resolvidos pelo método *BiCGSTAB*<sup>2</sup> [34] com pre-condicionamento *SSOR*<sup>3</sup>, aplicando a tolerância de  $10^{-12}$  na solução dos sistemas lineares.

## 6.1 Casos unidimensionais

Os casos unidimensionais aqui apresentados estão expostos ao estado de deformação uniaxial, onde existem deslocamentos em uma única direção, mesmo assim, estes podem servir como validação numérica do modelo de estado plano de deformações apresentado neste trabalho fazendo uma particularização das suas condições de contorno, visto que restringindo os deslocamentos na direção  $x$  e aplicando o carregamento na direção  $y$ , se reproduz o mesmo efeito de estado de deformação uniaxial na direção  $y$ .

### 6.1.1 Problema de Terzaghi

O problema de Terzaghi consiste em uma coluna de material poroso, conforme Figura 6.1, saturada com um fluido incompressível, a qual antes de ser exposta ao carregamento encontra-se totalmente relaxada e com uma distribuição nula de pressão do fluido no interior dos poros<sup>4</sup>. No instante inicial  $t = 0$ , sob uma condição não drenada do meio poroso, ou seja, nenhum fluido deixa as fronteiras da coluna, uma carga normal constante é aplicada no topo da coluna. O equilíbrio mecânico na coluna ocorre instantaneamente após a aplicação da carga, resultando na deformação do meio e no aumento da pressão do fluido. Com isso, a condição inicial do problema é estabelecida, onde a pressão inicial  $p_0$  encontra-se uniformemente distribuída por toda a coluna. Este mecanismo de aumento de pressão sob condição não drenada é conhecido como efeito de

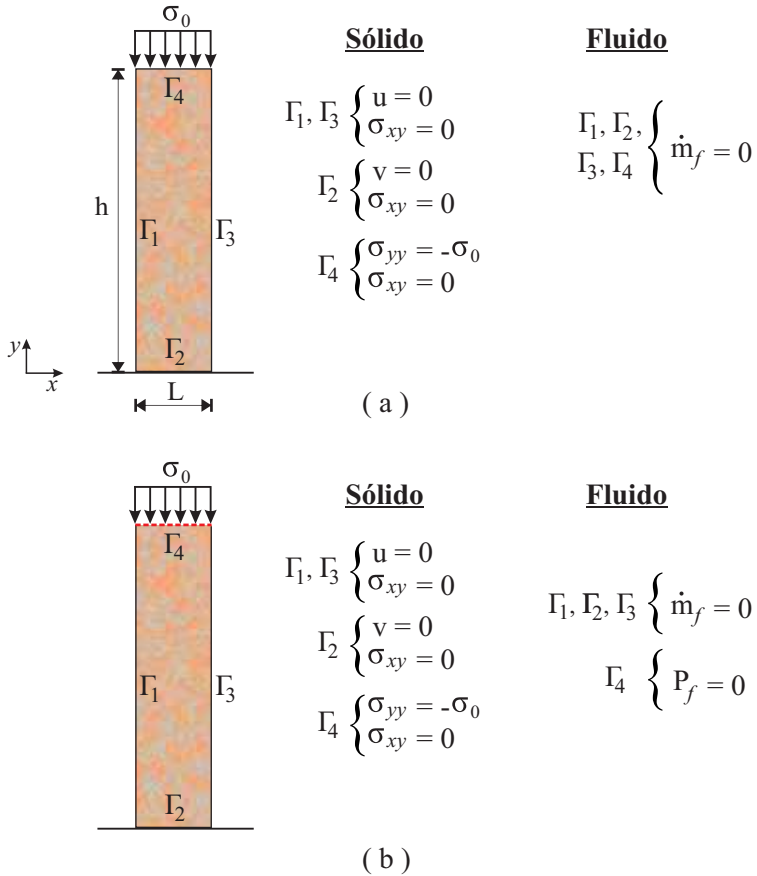
<sup>2</sup>Biconjugate Gradient Stabilized

<sup>3</sup>Symmetric Succesive Over Relaxation

<sup>4</sup>Neste problema a ação da gravidade é desconsiderada.



Skempton, o qual indica quanto da carga aplicada no topo da coluna está sendo suportada pelo fluido e quanto está sendo suportada pela matriz sólida. Na sequência, para  $t > 0$  a fronteira superior é liberada para o fluido escoar com a imposição de pressão nula na fronteira e assim inicia-se o processo transiente de redução da pressão no meio poroso. Lembrando que a carga aplicada no topo da coluna em  $t = 0$  continua agindo até o final do transiente. A Figura 6.1 apresenta o domínio de solução com as



**Figura 6.1** – Coluna com as condições de contorno. (a) Para o momento de aplicação da carga, instante inicial  $t = 0$  (condição não drenada). (b) Restante do tempo (condição drenada).

condições de contorno empregadas.

Os valores das propriedades físicas adotados para a rocha e o fluido, bem como outras considerações do problema estão resumidos na Tabela 6.1. Os dados relacionados a rocha foram retirados de Detournay e Cheng [14], no qual foram escolhidas as propriedades da rocha arenito Berea.

**Tabela 6.1** – Dados de entrada utilizados na simulação do problema de Terzaghi.

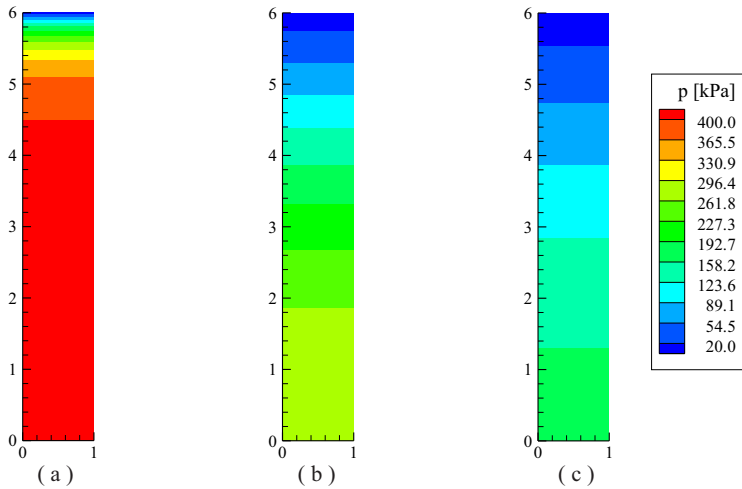
Malha	-	12x42
Altura da coluna	$m$	6,0
Largura da coluna	$m$	1,0
Módulo de elasticidade transversal	$Pa$	$6,0 \times 10^9$
Coefficiente de Poisson drenado	-	0,20
Coefficiente de Poisson não drenado	-	0,33
Coefficiente de Biot	-	0,79
Compressibilidade da fase sólida	$Pa^{-1}$	$2,65 \times 10^{-11}$
Porosidade	-	0,19
Permeabilidade absoluta	$md$	20,0
Viscosidade do fluido	$Pa.s$	0,001
Tempo de simulação	$s$	500
Passo de tempo	$s$	1,0
Tensão aplicada no topo da coluna	$Pa$	$1,0 \times 10^6$

A solução numérica deste problema é realizada em duas etapas, uma de inicialização e outra de solução do transiente. Na inicialização, os sistemas de equações algébricas dos modelos geomecânico e reservatório são resolvidos com as condições de contorno da Figura 6.1 (a). Nesta etapa, a solução ocorre em um único nível de tempo, instante  $t = 0$ , onde a solução do acoplamento segue o mesmo algoritmo iterativo<sup>5</sup> de um nível de tempo qualquer da solução transiente. Com esta solução alcança-se a condição de equilíbrio inicial do problema, obtendo todos os campos de variáveis definidos para o instante inicial. Na outra etapa, ocorre a

<sup>5</sup> Algoritmo de solução do acoplamento apresentado na seção 5.6.

solução propriamente dita do problema transiente, na qual são usadas as condições de contorno da Figura 6.1 (b).

A Figura 6.2 apresenta as soluções numéricas dos campos de pressão obtidos para os instantes de tempo de 1, 50 e 100 segundos. Observa-se pela escala de cores que não ocorrem variações da pressão ao longo do eixo  $x$ , isto é um indicativo que a solução está coerente, visto que o problema é unidimensional, podendo haver variações apenas ao longo do eixo  $y$ . Para o curto período de tempo de 1 segundo, nota-se que a condição inicial está bem estabelecida, pois quase toda a coluna está com a pressão inicial uniformemente distribuída, exceto próximo ao topo da coluna, onde o efeito da pressão nula da fronteira já foi sentido. Através dos resultados dos três instantes de tempo, constata-se que a solução está se aproximando do regime permanente, o qual será alcançado quando a pressão em toda a coluna estabelecer o mesmo valor da pressão nula do topo.



**Figura 6.2** – Campos de pressão obtidos para três tempos, (a) 1, (b) 50 e (c) 100 segundos.

Os três campos de deslocamento vertical apresentados na Figura 6.3 foram obtidos nos instantes inicial e final da simulação, e no instante intermediário de 50 segundos. Todos os campos mostram que o deslocamento vertical não sofreu variações ao longo do eixo  $x$ , comprovando que a compactação da coluna ocorreu de forma gradativa, variando apenas na

direção  $y$ . Outro fator importante, é que os resultados numéricos dos deslocamentos horizontais apresentaram valores da ordem de  $10^{-18}$ , ou seja, muito próximos de zero, concordando assim com a solução analítica do estado uniaxial de deformação, a qual rege que não existem deslocamentos horizontais. A Figura 6.3 (a) mostra o campo de deslocamento vertical inicial resultante da aplicação da carga, enquanto o fluido ainda não pode escoar pelo topo da coluna. E em 6.3 (c) está o campo de deslocamento final, onde é definido o grau máximo de compactação da coluna para esta carga.

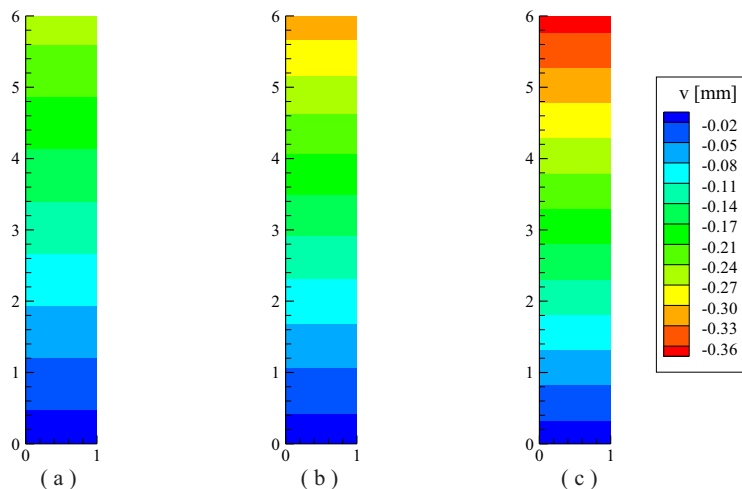
A validação numérica do modelo é realizada comparando as soluções analíticas com as numéricas da pressão e do deslocamento vertical. Esta validação é importante para verificar se o método numérico está resolvendo com exatidão as equações diferenciais do problema. Assim, na Figura 6.4 estão mostrados a variação temporal da pressão e do deslocamento vertical, avaliados na base <sup>6</sup> e no topo <sup>7</sup> da coluna, respectivamente, onde verifica-se que os resultados numéricos apresentam grande concordância com os analíticos, pois visualmente a solução numérica está sobreposta à analítica. A Tabela 6.2 contém valores numéricos e analíticos para alguns instantes de tempo calculados nas mesmas posições da Figu-

**Tabela 6.2** – Comparação entre os valores numéricos e analíticos.

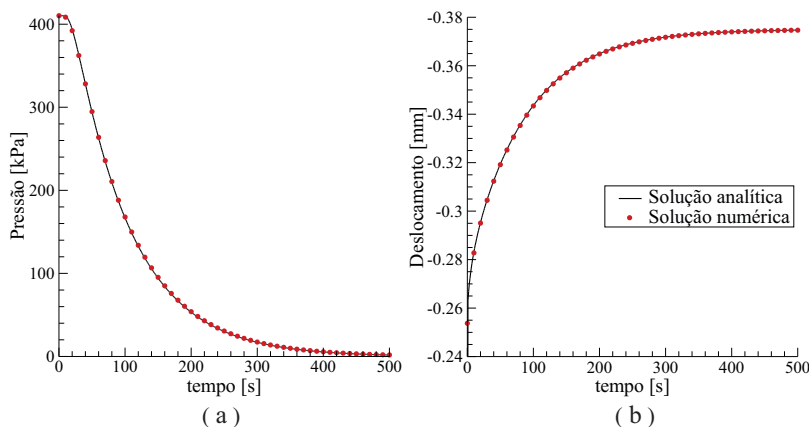
Tempo [s]	Deslocamento vertical [mm]			Pressão [Pa]		
	Analítico	Numérico	Erro (%)	Analítico	Numérico	Erro (%)
0	-0,25373	-0,25373	0,000	410.248,76	410.248,76	0,000
5	-0,27454	-0,27399	0,216	410.141,10	410.244,90	0,025
10	-0,28316	-0,28277	0,153	408.417,28	409.351,97	0,228
50	-0,31939	-0,31918	0,080	294.352,65	293.708,86	0,157
100	-0,34361	-0,34340	0,083	167.615,94	166.541,88	0,262
200	-0,36498	-0,36485	0,051	53.853,83	53.186,76	0,163
300	-0,37180	-0,37173	0,025	17.315,50	16.984,99	0,081

<sup>6</sup>O ponto específico onde está sendo calculada a pressão é o centro do primeiro volume de controle na base da coluna.

<sup>7</sup>Devido ao arranjo das variáveis na malha, o deslocamento está sendo calculado exatamente no topo.



**Figura 6.3** – Campos de deslocamento vertical obtidos para três tempos, (a) Inicial, (b) 50 e (c) 500 segundos.

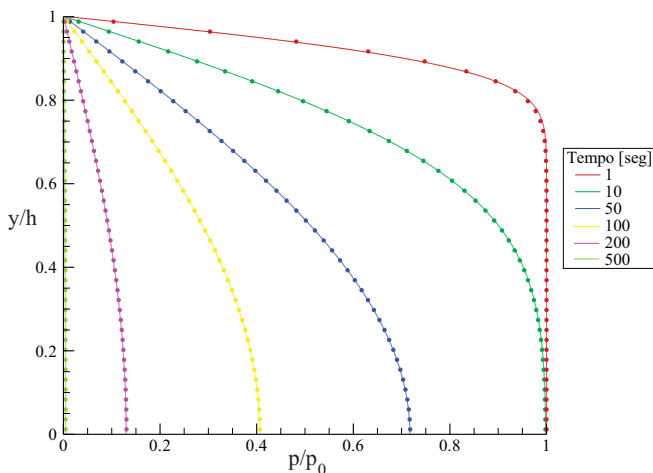


**Figura 6.4** – Comparação entre os resultados numéricos e as soluções analíticas. (a) Pressão na base da coluna. (b) Deslocamento vertical no topo da coluna.

ra 6.4, os quais comprovam a eficácia da solução numérica, pois os valores estão muito próximos, com erros relativos bastante baixos. Os erros relati-

vos desta tabela foram normalizados pelos valores analíticos das variáveis calculadas no instante inicial.

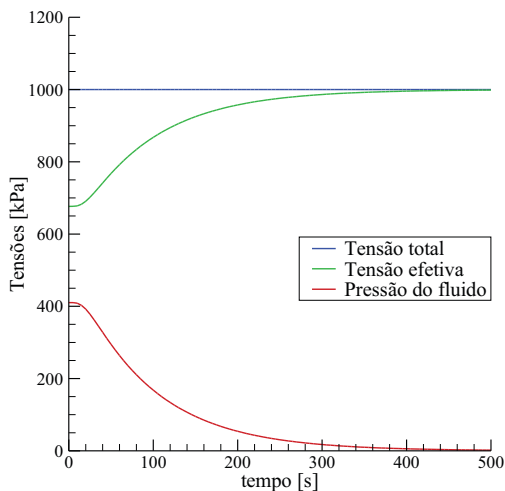
Para reforçar a boa acurácia da solução numérica, o gráfico da Figura 6.5 apresenta a solução da pressão ao longo do espaço para diferentes tempos. Novamente, independente da posição e do tempo, os resultados numéricos e analíticos praticamente coincidem. Neste gráfico a pressão está adimensionalizada pela pressão inicial e a posição vertical pela altura da coluna.



**Figura 6.5** – Comparação entre os resultados numéricos e analíticos da pressão ao longo do espaço.

A Figura 6.6 ajuda a compreender o princípio das tensões efetivas formulado por Terzaghi [30], nela estão mostradas as variações temporais das tensões normais na direção  $y$  e da pressão do fluido. Este princípio resumidamente diz que a tensão total sentida pelo meio poroso divide-se em duas parcelas, a tensão efetiva, a qual atua exclusivamente na matriz sólida e a pressão de poros. Assim, este comportamento pode ser visto em 6.6, pois inicialmente parte da carga aplicada no topo está sendo suportada pelo fluido e parte pela matriz sólida. Com a evolução do tempo, o fluido vai deixando a coluna causando sua queda na pressão, e esta queda vai sendo compensada pelo aumento na tensão efetiva. Este processo segue até a pressão do fluido chegar a zero, momento em que toda a carga está

sendo suportada pela matriz sólida. Lembrando que não houveram variações da tensão total com o tempo, pelo fato da carga aplicada ser mantida constante.

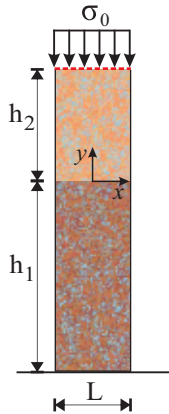


**Figura 6.6** – Variação temporal das tensões atuantes na base da coluna.

Cabe salientar que os resultados aqui apresentados foram simulados com uma malha de 12x42, porém também foram testados diferentes níveis de refinamento da malha, onde constatou-se que mesmo em malhas mais grosseiras a solução numérica convergiu rapidamente, concordando com a solução analítica. Assim, na solução deste primeiro caso, o método numérico mostrou-se bastante acurado na solução, onde o MVF conseguiu resolver corretamente as equações diferenciais tanto do modelo de fluxo, quanto do modelo geomecânico.

### 6.1.2 Coluna poroelástica composta por dois materiais.

Este problema é bastante similar ao problema de Terzaghi, pois a coluna poroelástica está submetida as mesmas condições de contorno, porém agora, a coluna é composta por dois materiais com diferentes propriedades físicas, conforme esquema da Figura 6.7. Este exemplo reproduz uma situação comumente encontrada em reservatórios de petróleo, camadas de rochas sobrepostas com propriedades bastante distintas, como por



**Figura 6.7** – Coluna composta por dois materiais diferentes.

exemplo, reservatórios areníticos com alta permeabilidade intercalados por camadas de folhelhos com baixa permeabilidade. Assim, este é um caso interessante para verificar se o método numérico consegue resolver com exatidão as regiões próximas à interface entre os materiais. Como o problema apresenta solução analítica, a verificação é feita comparando a solução numérica com a analítica para diferentes contrastes entre as propriedades dos materiais. A solução analítica retirada de Verruijt [35] foi desenvolvida apenas para a variável pressão, assim as comparações são realizadas apenas para esta variável.

**Tabela 6.3** – Dados de entrada para o caso onde os materiais apresentam permeabilidades diferentes.

Malha	-	20x60
Altura do meio inferior ( $h_1$ )	$m$	8,0
Altura do meio superior ( $h_2$ )	$m$	4,0
Permeabilidade absoluta do meio superior	$md$	0,2
Tensão aplicada no topo da coluna	$Pa$	$1,0 \times 10^4$

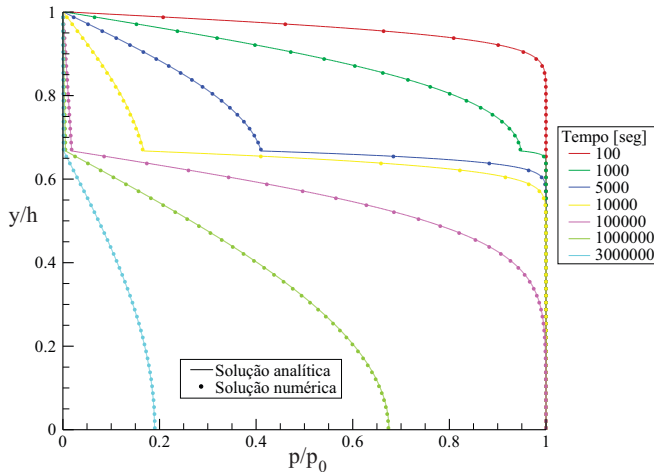
Em primeiro momento é analisada a condição onde os dois materiais da coluna possuem as mesmas propriedades mecânicas e diferentes permeabilidades. Os resultados são apresentados variando a relação de



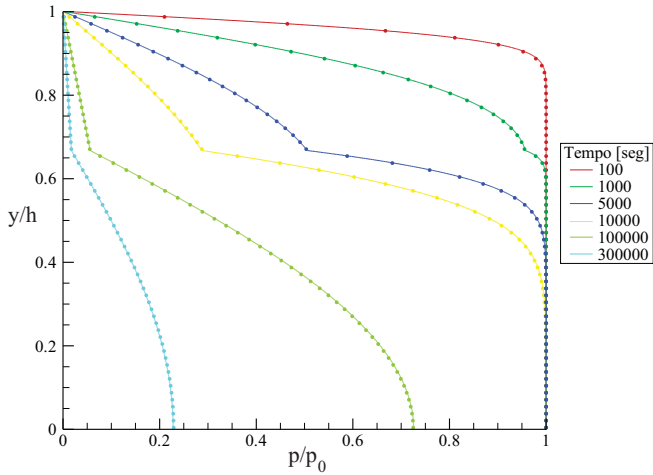
permeabilidade entre os dois meios. Para isso, definiu-se a razão de permeabilidade  $R_k$ , como sendo a divisão entre a permeabilidade do meio superior ( $K_2$ ) pela permeabilidade do meio inferior ( $K_1$ ), ou seja,  $R_k = K_2/K_1$ . Para esta situação empregam-se as mesmas propriedades mecânicas do problema de Terzaghi. Assumiu-se também a mesma porosidade para os dois meios, a qual o valor é o mesmo da Tabela 6.1. Os outros parâmetros de entrada necessários para a simulação são listados na Tabela 6.3.

Nos gráficos a seguir estão plotadas as soluções numérica e analítica da pressão em função do espaço para diferentes tempos, onde a pressão está adimensionalizada pela pressão inicial e a posição vertical  $y$  pelo comprimento total da coluna.

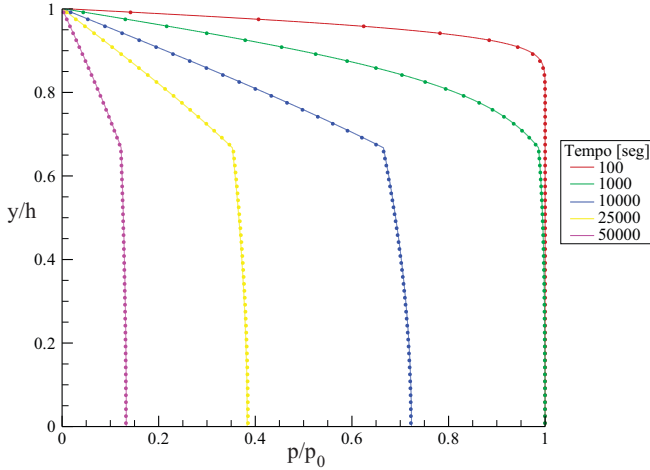
As Figuras 6.8 e 6.9 mostram os resultados em que a permeabilidade do meio poroso superior é 100 e 10 vezes maior que a permeabilidade do meio inferior. Nota-se a rápida redução de pressão ocorrendo no meio superior e uma brusca redução desta acontecendo na interface entre os materiais. Por exemplo, para a relação de permeabilidade  $R_k = 100$  no tempo de 10.000 segundos, mais de 80% da pressão já foi reduzida no meio poroso superior, enquanto quase todo o meio inferior ainda continua com valor inicial de pressão. Assim, mesmo com esta diferença de escala de tempo na ocorrência do fenômeno físico entre os dois meios, o método



**Figura 6.8** – Pressão numérica versus analítica para  $R_k = 100$ .



**Figura 6.9** – Pressão numérica versus analítica para  $R_k = 10$ .



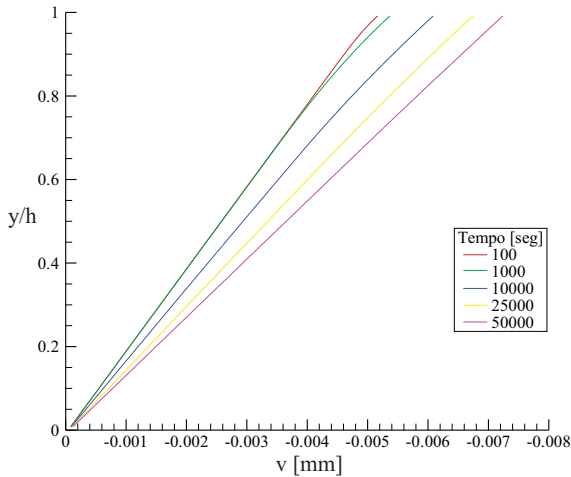
**Figura 6.10** – Pressão numérica versus analítica para  $R_k = 0.1$ .

numérico apresentou rápida convergência e boa precisão na solução, pois mesmo próximo a interface entre os materiais, os pontos da solução numérica visualmente se sobrepõem as linhas da solução analítica. Os passos de

tempo usados nas simulações dos casos  $R_k = 100$  e  $R_k = 10$  foram 20 e 10 segundos, respectivamente.

Na Figura 6.10 tem-se a situação oposta a mostrada anteriormente, agora o meio poroso superior possui permeabilidade menor que o meio inferior, com  $R_k = 0.1$ . Neste caso, a menor permeabilidade do meio superior impõe maior resistência ao fluxo, dominando assim o processo de redução da pressão pela coluna. Novamente observa-se uma grande concordância entre a solução numérica e a analítica. O passo de tempo assumido neste caso foi de 10 segundos.

O comportamento do deslocamento vertical é similar para as três diferentes relações de permeabilidade, visto que os dois materiais da coluna apresentam as mesmas propriedades mecânicas. Assim, para exemplificar uma destas soluções, a Figura 6.11 ilustra os resultados numéricos da variação do deslocamento vertical ao longo do tempo para  $R_k = 0.1$ . Observa-se que o deslocamento vertical apresenta uma mesma tendência em toda a coluna, sendo imperceptível notar a posição da interface entre os materiais pelo gráfico<sup>8</sup>.



**Figura 6.11** – Solução numérica do deslocamento vertical para  $R_k = 0.1$ .

Na sequência é abordado o caso onde os dois meios possuem a mesma

<sup>8</sup>Mais comentários sobre este gráfico serão realizados na sequência, quando meios com diferentes compressibilidades forem abordados.

permeabilidade e diferentes compressibilidade e propriedades poroelásticas. As propriedades adotadas na simulação estão listadas na Tabela 6.4. A malha e carga aplicada na coluna são as mesmas da Tabela 6.3. Para esta situação, não será comparada a solução numérica com a analítica, e sim apenas serão mostrados os resultados numéricos.

**Tabela 6.4** – Dados de entrada para o caso onde os materiais apresentam compressibilidades diferentes.

		Meio inferior	Meio superior
Altura	$m$	8,0	4,0
Módulo de elasticidade transversal	$Pa$	$6,0 \times 10^9$	$4,2 \times 10^8$
Coefficiente de Poisson drenado	-	0,20	0,15
Coefficiente de Poisson não drenado	-	0,33	0,31
Coefficiente de Biot	-	0,79	0,85
Compressibilidade da fase sólida	$Pa^{-1}$	$2,65 \times 10^{-11}$	$3,26 \times 10^{-10}$
Porosidade	-	0,19	0,20
Permeabilidade absoluta	$md$	2,0	2,0

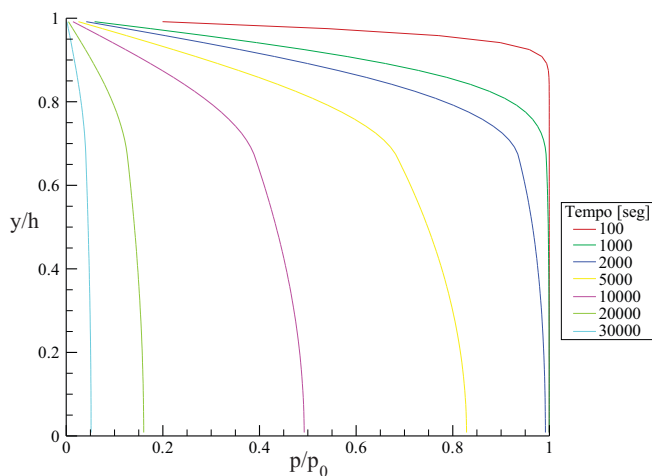
Cabe salientar que como temos dois meios com propriedades poroelásticas diferentes, no momento da aplicação da carga no instante inicial, a condição de equilíbrio entre o estado de tensão no sólido e a pressão do fluido não ocorre instantaneamente. Pois, a carga aplicada no topo é distribuída em forma de tensão efetiva no sólido e pressão no fluido, e esta distribuição é dependente das propriedades poroelásticas, mais precisamente do coeficiente de Skempton <sup>9</sup>. Quanto mais se aproximar de zero este coeficiente, mais carga está sendo suportada pelo sólido e consequentemente menor é a pressão do fluido, por outro lado, quanto mais se aproximar de um, menor é a carga suportada pelo sólido. Assim, quando aplicou-se a carga na coluna, o meio superior apresentou um valor de pressão menor que do meio inferior, consequentemente devido ao gradiente de pressão entre os meios, criou-se um fluxo do meio inferior para o

<sup>9</sup>Ver definição física na seção 2.2.1, equação 2.28 e sua relação com outras propriedades físicas no anexo A.

superior. Com isso, a etapa de inicialização da solução numérica foi modificada para esta situação, ao invés de ser resolvida em um único instante de tempo, resolveu-se em vários passos de tempo, até um tempo suficiente para obter uma pressão uniforme em toda a coluna, e assim alcançar a condição de equilíbrio inicial. Lembrando que neste período a coluna ficou exposta a uma condição não drenada. Somente após a condição de equilíbrio ser estabelecida, instante este assumido como  $t = 0$  da solução propriamente dita, iniciou-se o processo transiente de drenagem do fluido pelo topo da coluna.

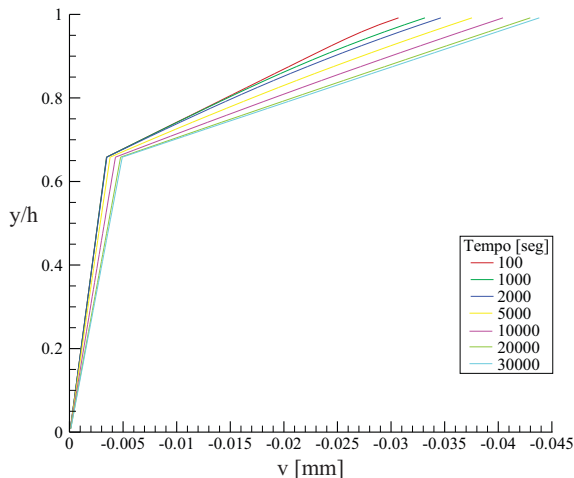
A solução numérica da pressão está mostrada na Figura 6.12, onde observa-se um comportamento similar ao de uma coluna composta pelo mesmo material <sup>10</sup>. Pois, como a permeabilidade é a mesma em ambos os meios e esta é a propriedade que controla a difusão da pressão, não ocorre aquela mudança brusca da derivada da pressão na interface entre os materiais, como visto nas Figuras 6.8, 6.9 e 6.10.

Já na Figura 6.13 é perceptível a influência das propriedades mecânicas no deslocamento vertical, pois como o meio superior é menos resistente e mais compressível que o inferior, sofre uma maior deformação,



**Figura 6.12** – Solução numérica da pressão para meios com diferentes compressibilidades.

<sup>10</sup>Ver Figura 6.5 apresentada no problema de Terzaghi.



**Figura 6.13** – Solução numérica do deslocamento vertical para meios com diferentes compressibilidades.

como pode ser constatado pela maior inclinação da curva do deslocamento no gráfico. Comparando as Figuras 6.13 e 6.11, constata-se que as variações de permeabilidade entre os meios em 6.11 não causaram mudança da deformação na interface entre os meios, enquanto em 6.13 é nítida esta mudança, comprovando a influência das propriedades mecânicas no deslocamento.

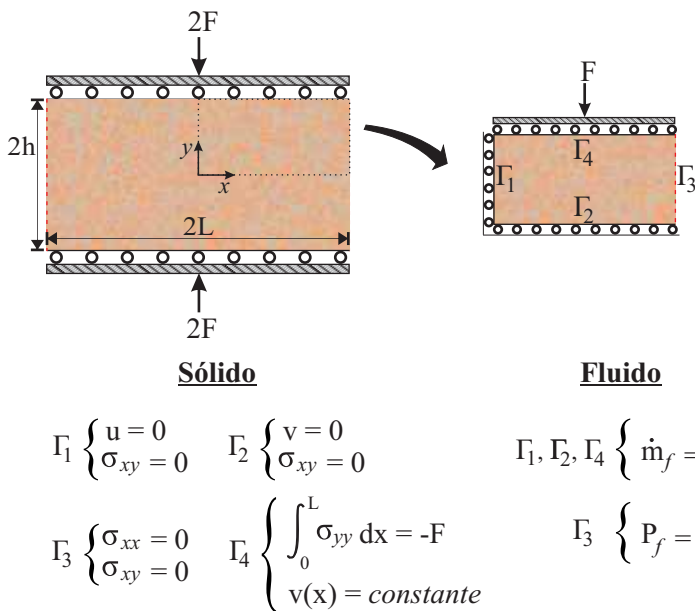
Com os resultados numéricos apresentados, evidenciou-se a precisa solução do método numérico também nas proximidades da interface entre os materiais, o qual era o foco da presente análise. Pois uma ótima concordância entre as soluções numérica e analítica foi observada até mesmo para as simulações com maiores contrastes de permeabilidade. Com isso, comprova-se que o acoplamento físico está sendo bem postado e o método numérico está conseguindo resolvê-lo com eficiência.

## 6.2 Caso bidimensional - Problema de Mandel

O problema de Mandel é um excelente teste para verificar a robustez da solução do acoplamento entre os modelos de reservatório e geomecânico, pois este apresenta um comportamento não monotônico da pressão causado pela interação sólido/fluido, o qual não é observado em soluções

desacopladas de poroelasticidade [1]. Mandel [22] foi quem modelou e resolveu inicialmente o problema, obtendo a solução analítica para a pressão do fluido. Mais tarde, Abousleiman *et al.* [1] complementaram a solução analítica com expressões para os deslocamentos e as tensões <sup>11</sup>.

O problema é composto por uma amostra porosa saturada com fluido de dimensões  $2L$  na direção  $x$ ,  $2H$  na direção  $y$  e infinitamente longa na direção  $z$ . A amostra é comprimida por duas placas rígidas e impermeáveis nas superfícies superior e inferior, enquanto é livre para se deformar nas fronteiras laterais, conforme Figura 6.14. No instante  $t = 0$  aplica-se uma força de magnitude  $2F$  sobre as placas, enquanto todas as fronteiras são mantidas impermeáveis (condição não drenada). Com isso, uma distribuição uniforme de pressão é gerada na amostra pelo efeito de Skempton. Após para  $t > 0$ , as laterais do domínio são abertas ao fluxo e inicia-se a redução de pressão no meio.



**Figura 6.14** – Problema de Mandel destacando o domínio de solução usado na simulação numérica com as respectivas condições de contorno.

<sup>11</sup>Todas as soluções analíticas estão apresentadas no apêndice C.

O comportamento inesperado ocorre nos instantes iniciais da drenagem, pois conforme o fluido vai deixando a amostra pelas laterais, a pressão do fluido no centro do domínio aumenta para valores acima da pressão inicial. Este fenômeno ocorre devido no momento que a carga é aplicada, a amostra está exposta a uma condição não drenada, onde a pressão do fluido age como uma rigidez compressiva aparente do material, ajudando este a suportar a carga. Quando começa a drenagem, esta rigidez é reduzida nas laterais devido a redução da pressão do fluido, causando uma contração nas laterais da amostra. Consequentemente, para manter o equilíbrio de forças no meio, ocorre uma transferência de carga compressiva em direção ao centro do domínio. Esta transferência de tensão total compressiva atua como um mecanismo de geração de poro-pressão no centro do domínio, causando o aumento da pressão do fluido. Após Mandel ter observado este comportamento da pressão, Cryer [11] também constatou a mesma reação em uma análise de consolidação de uma esfera exposta a pressão hidrostática. Com isso, esta resposta não monotônica da pressão ficou conhecida como efeito de Mandel-Cryer. Este fenômeno físico foi confirmado em experimentos de laboratório no trabalho de Gibson *et al.* [17].

Devido à simetria do problema, o domínio de solução é reduzido a apenas um quarto do total, como mostrado na Figura 6.14. Assim, todos os resultados que serão apresentados e discutidos na sequência são referentes ao quadrante superior direito do domínio total. Os dados de entrada usados na simulação estão resumidos na Tabela 6.5.

Do ponto de vista das condições de contorno, a condição de placa rígida significa que a força total aplicada é distribuída ao longo do topo da amostra segundo a expressão 6.1.

$$\int_0^L \sigma_f dx = -F \quad (6.1)$$

E a restrição de deslocamento vertical não variando com  $x$  na fronteira superior garante que toda a superfície da placa permanece em contato com a amostra.

Na implementação destas condições de contorno na solução numérica para a equação de equilíbrio na direção  $y$  deparou-se com algumas dificuldades, pois o perfil da tensão normal na fronteira não é conhecido,



**Tabela 6.5** – Dados de entrada utilizados na simulação do problema de Mandel.

Malha	-	50x20
Dimensão L	$m$	10,0
Dimensão H	$m$	2,0
Módulo de elasticidade transversal	$Pa$	$6,0 \times 10^9$
Coefficiente de Poisson drenado	-	0,20
Coefficiente de Poisson não drenado	-	0,33
Coefficiente de Biot	-	0,79
Compressibilidade da fase sólida	$Pa^{-1}$	$2,65 \times 10^{-11}$
Compressibilidade do fluido	$Pa^{-1}$	$2,03 \times 10^{-10}$
Porosidade	-	0,19
Permeabilidade absoluta	$md$	0,2
Viscosidade do fluido	$Pa.s$	0,001
Tempo de simulação	$s$	100.000
Passo de tempo	$s$	5,0
Força $F$ aplicada nas placas rígidas	$N$	$1,0 \times 10^8$

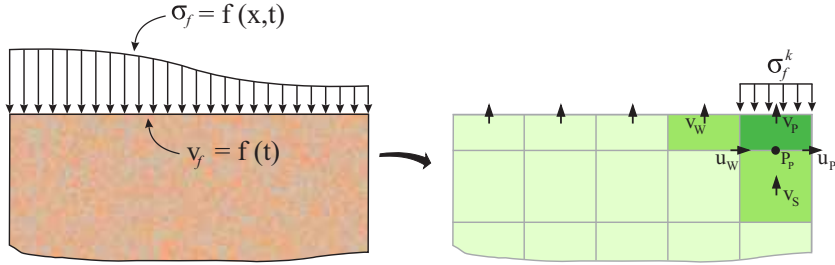
apenas sabe-se que varia no espaço e no tempo e deve respeitar a relação 6.1. O valor do deslocamento vertical na fronteira também não é conhecido, pois varia no tempo. Assim, a estratégia adotada foi realizar o balanço em apenas um volume de controle, no volume superior direito, conforme Figura 6.15, para incorporar a condição do carregamento. E nos demais volumes da fronteira superior foi imposto que todos possuem o mesmo valor de deslocamento vertical. Com isso, a equação aproximada para o volume onde foi realizado o balanço assumiu a forma

$$A_p^{vv} v_P = A_w^{vv} v_W + A_s^{vv} v_S + A_p^{vu} u_P + A_w^{vu} u_W + B_p^v \quad (6.2)$$

enquanto para os outros volumes da fronteira superior

$$A_p^{vv} v_P = A_e^{vv} v_E \quad (6.3)$$

com



**Figura 6.15** – Esquema usado na implementação das condições de contorno na fronteira superior do domínio.

$$A_p^{vv} = 1 \quad \text{e} \quad A_e^{vv} = 1 \quad (6.4)$$

Observa-se que a solução do problema apresenta uma condição de contorno iterativa, pois o valor da tensão na fronteira  $\sigma_f^k$  armazenada no termo fonte  $B_p^v$  da equação 6.2 não é conhecido, pois apenas é conhecido o valor da força  $F$  aplicada. Assim, a alternativa encontrada para sanar este problema foi empregar o ciclo iterativo abaixo:

1. Estima a tensão na fronteira  $\sigma_f^k$ , com o valor calculado no passo de tempo anterior ou inicial.
2. Resolve os modelos de reservatório e geomecânico até a convergência destes.
3. Checa a condição da equação 6.1, descrita na forma discreta em 6.5, onde  $\sigma_{yyi}^k$  são as tensões normais calculadas nos volumes de controle da fronteira superior <sup>12</sup>.

$$\left| \sum_{i=0}^n |\sigma_{yyi}^k| \Delta x_i - F \right| \leq \epsilon \quad (6.5)$$

Não atendendo ao critério de convergência, retorna ao passo 1 com um novo valor para a tensão, estimado por

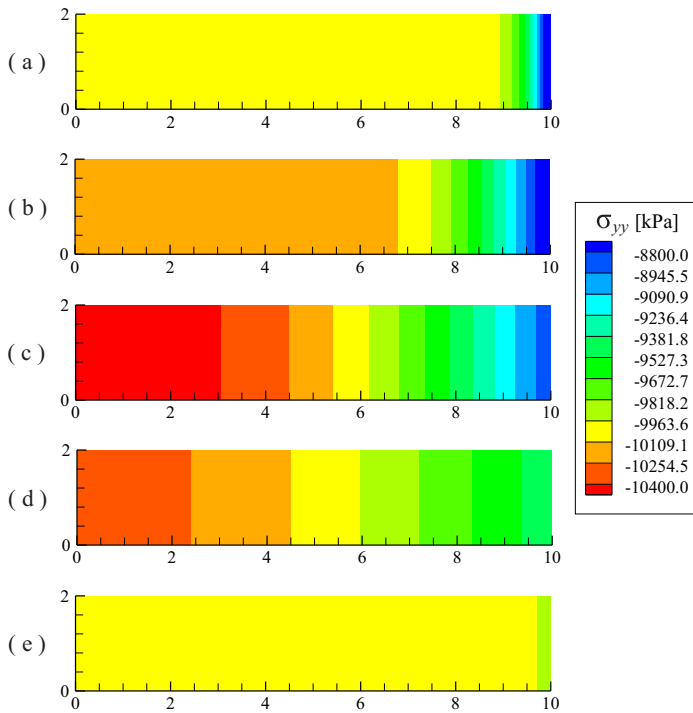
$$\sigma_f^{k+1} = \sigma_f^k - \left( \frac{\sum_{i=0}^n |\sigma_{yyi}^k| \Delta x_i - F}{L} \right) \quad (6.6)$$

<sup>12</sup>Em que  $n$  é o número total de volumes de controle adjacentes a fronteira superior.

#### 4. Alcançando o critério de convergência $\epsilon$ , avança no tempo.

O critério de convergência  $\epsilon$  empregado nas soluções deste ciclo iterativo foi de  $10^{-5}$  absoluto.

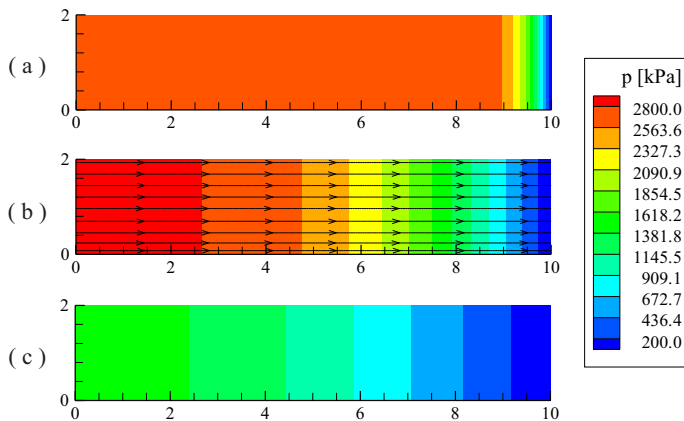
Na sequência são apresentados os resultados numéricos obtidos com o método dos volumes finitos seguindo a metodologia discutida anteriormente. Primeiramente na Figura 6.16 é mostrado a evolução do campo de tensão normal  $\sigma_{yy}$  ao longo do tempo. Observa-se claramente o fenômeno explicado anteriormente da causa do comportamento não monotônico da pressão, pois nos instantes iniciais como em 6.16 (a) ocorre a brusca redução da tensão na lateral direita do domínio devido a drenagem do fluido, causando a transferência de carga compressiva em direção ao centro do domínio total, a qual será responsável pelo aumento da pressão do fluido. Nota-se ainda pela escala de cores que em todos os campos de 6.16 a ten-



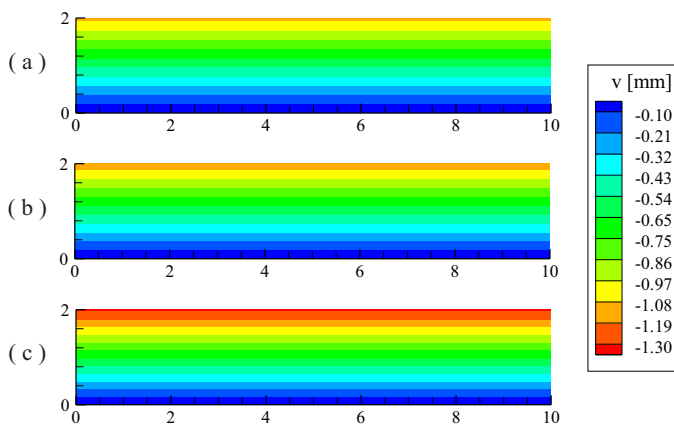
**Figura 6.16** – Campos de tensão total vertical obtidos nos tempos, (a) 100, (b) 1000, (c) 5000, (d) 25000 e (e) 100000 segundos.

são não variou ao longo da direção  $y$ , concordando assim com a solução analítica.

A comprovação que a solução numérica está captando o efeito de Mandel-Cryer está mostrada na Figura 6.17, pois comparando 6.17 (b) com (a) observa-se que a pressão do fluido alcança valores maiores que o inicial



**Figura 6.17** – Campos de pressão obtidos nos tempos, (a) 100, (b) 3200 e (c) 25000 segundos, contemplando as linhas de fluxo para 3200 segundos.

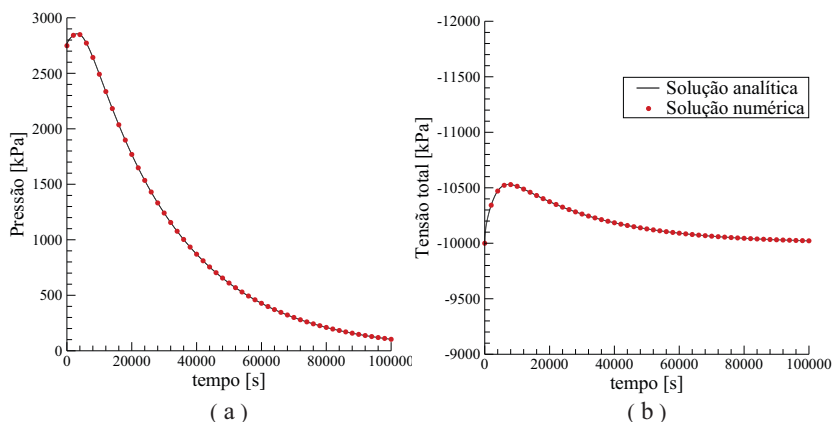


**Figura 6.18** – Campos de deslocamento vertical obtidos nos tempos, (a) 100, (b) 3200 e (c) 100000 segundos.

para a região próxima ao centro do domínio total. Cabe ressaltar ainda que este aumento de pressão ocorre apenas nos instantes iniciais, pois para um período de tempo bastante longo, a pressão em toda amostra tenderá ao valor nulo de pressão das laterais, como está tendendo em 6.17 (c). A Figura 6.17 (b) contempla ainda as linhas de fluxo para comprovar que o fluxo apresenta componentes apenas na direção  $x$ .

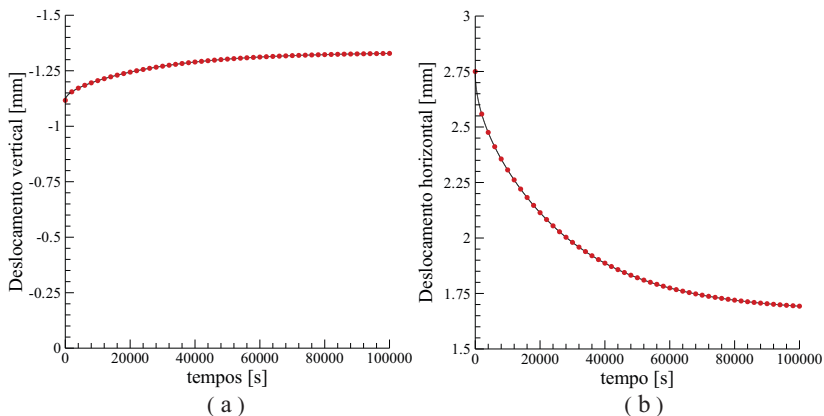
A Figura 6.18 ilustra os campos de deslocamento vertical para alguns instantes de tempo, onde pode ser constatado que a condição de contorno de deslocamento vertical independente de  $x$  no topo da amostra está bem estabelecida, pois os resultados de  $v$  não apresentam variações ao longo do eixo  $x$ .

A comparação dos resultados numéricos com as soluções analíticas<sup>13</sup> são mostradas nas Figuras 6.19 a 6.24, onde as linhas cheias representam as soluções analíticas e os pontos as numéricas. Observa-se em todos os gráficos que os resultados numéricos praticamente se sobrepõem aos analíticos, comprovando a excelente eficácia do método numérico na solução do acoplamento e das equações diferenciais do problema físico. Pois, independente da variável analisada, do instante de tempo ou da sua posição



**Figura 6.19** – Comparação entre os resultados numérico e analítico. (a) Pressão em  $x = 0$  (b) Tensão total vertical em  $x = 0$ .

<sup>13</sup>As equações das soluções analíticas empregadas nestas figuras estão apresentadas no apêndice C.



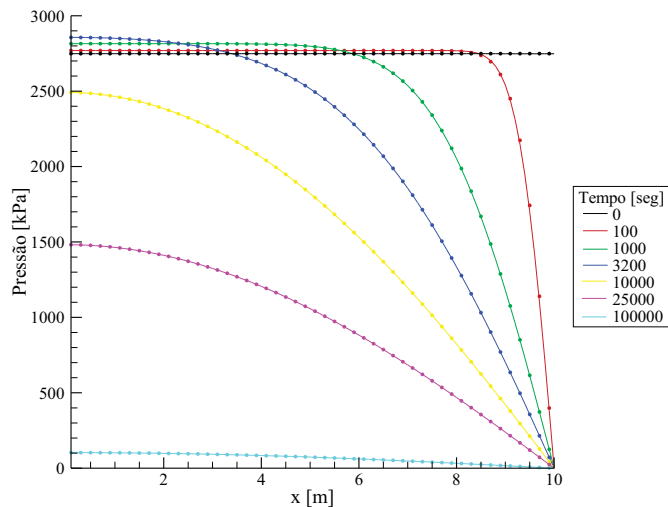
**Figura 6.20** – Comparação entre os resultados numérico e analítico. (a) Deslocamento vertical em  $y = H$  (b) Deslocamento horizontal em  $x = L$ .

no domínio, em todas as situações os valores numéricos proporcionaram grande concordância com os analíticos.

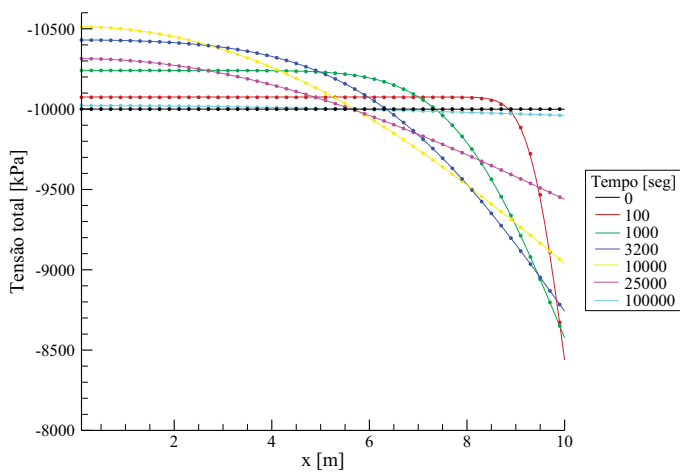
Na Figura 6.19 (a) o efeito de Mandel-Cryer torna-se evidente com o crescimento da pressão na posição  $x = 0$  nos instantes iniciais do transiente. Nota-se ainda que o máximo valor da pressão ocorre em torno de 3185 segundos, não coincidindo com o máximo valor de  $\sigma_{yy}$ , o qual acontece em 7380 segundos.

Os resultados dos deslocamentos da Figura 6.20 mostram que a aplicação da carga no instante inicial causa uma deformação elástica no material, proporcionando uma compactação na direção  $y$  e pelo efeito de Poisson, expansão na direção  $x$ . Para  $t > 0$ , quando é imposta a condição drenada na amostra, observa-se que na direção  $y$  o material continua se compactando, enquanto na direção  $x$  ocorre uma contração. Esta contração é devido a mudança do efetivo valor do coeficiente de Poisson, o qual alterou do valor não drenado para drenado.

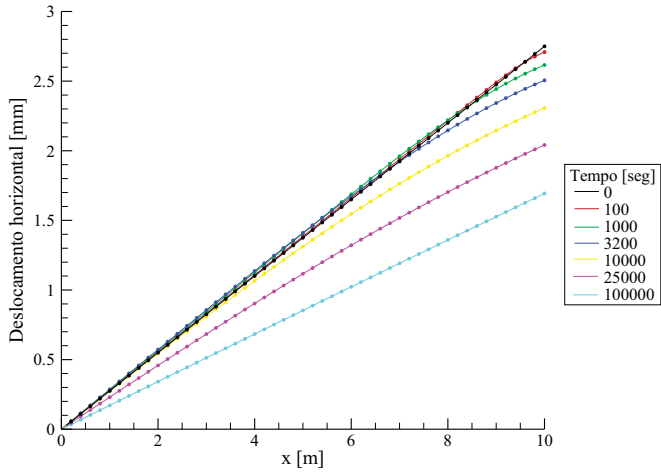
Os resultados numéricos da pressão e da tensão normal ao longo do eixo  $x$  nas Figuras 6.21 e 6.22 confirmam a excelente concordância da solução numérica com a analítica, independente da posição no domínio e do instante de tempo das quais estão sendo calculadas. Quanto ao comportamento da tensão normal, cabe observar em 6.22 que inicialmente a tensão assume o valor  $\sigma_{yy} = F/L$ , representada pela curva preta no gráfico, e após



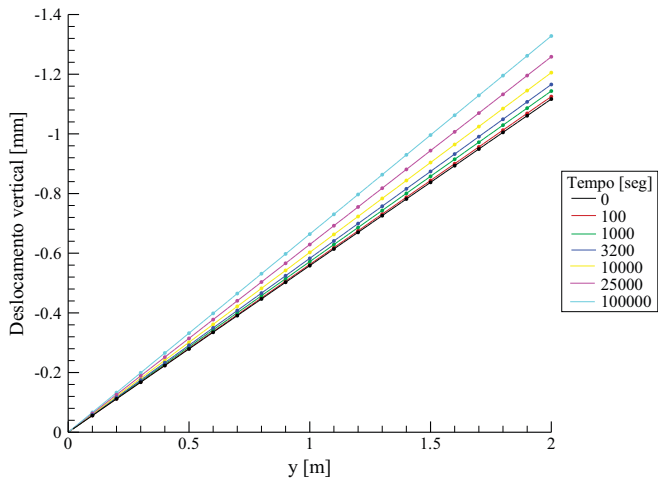
**Figura 6.21** – Comparação entre os resultados numéricos e analíticos da pressão ao longo do eixo  $x$  para diferentes tempos.



**Figura 6.22** – Comparação entre os resultados numéricos e analíticos da tensão total normal ao longo do eixo  $x$  para diferentes tempos.



**Figura 6.23** – Comparação entre os resultados numéricos e analíticos do deslocamento horizontal ao longo do eixo  $x$  para diferentes tempos.



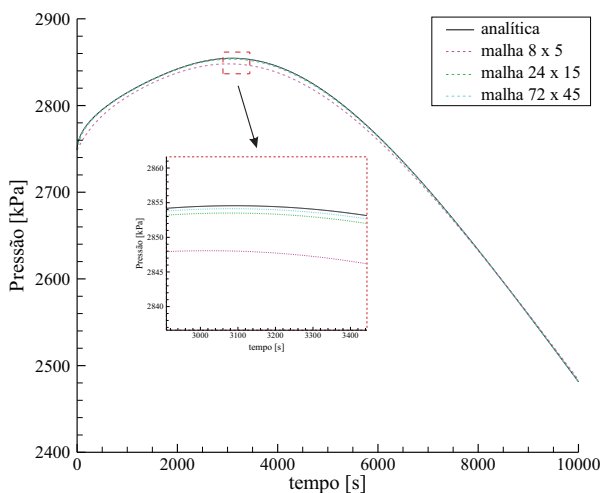
**Figura 6.24** – Comparação entre os resultados numéricos e analíticos do deslocamento vertical ao longo do eixo  $y$  para diferentes tempos.



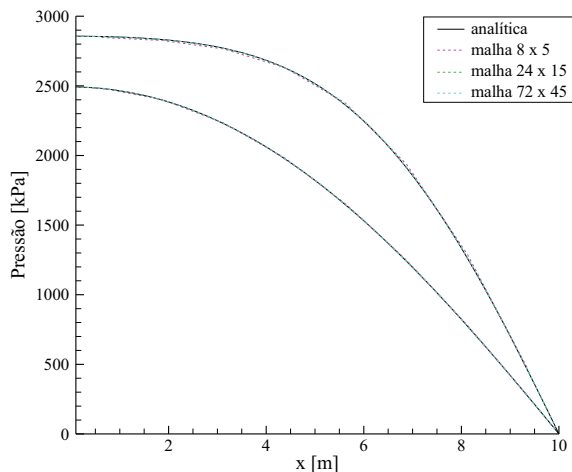
a transferência de tensão ao centro da amostra, a tensão volta a se estabilizar no valor inicial, como visto na curva azul clara, já quando a pressão do fluido quase chegou a zero.

Os resultados dos deslocamentos em 6.23 e 6.24 mostram que a deformação na direção  $y$  é função apenas do tempo, enquanto na direção  $x$  varia tanto no tempo quanto no espaço.

Para finalizar a validação numérica do modelo, as Figuras 6.25 e 6.26 mostram a comparação entre os resultados numéricos e analíticos da pressão calculados em uma mesma posição do domínio, usando diferentes malhas. Observa-se que as soluções estão apresentando o comportamento esperado, pois a medida que a malha computacional é refinada, as soluções numéricas se aproximam progressivamente a solução analítica.



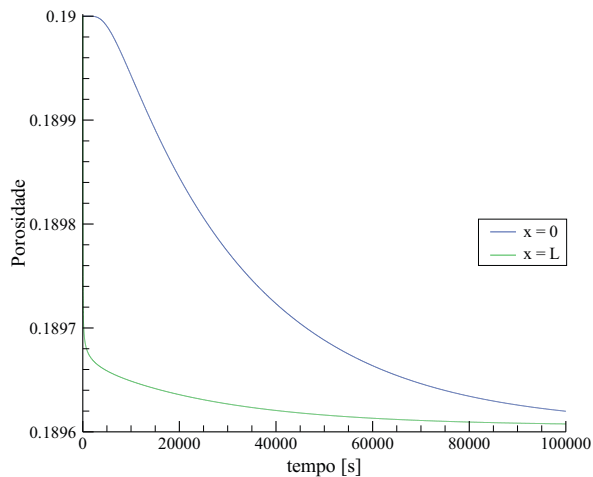
**Figura 6.25** – Pressão em função do tempo calculada em  $x = 0.625$  e  $y = 0.2$  m. (centro do VC inferior esquerdo da malha mais grosseira).



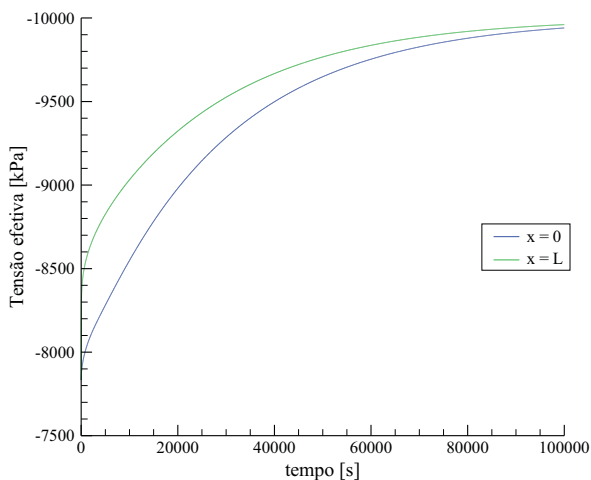
**Figura 6.26** – Pressão em função de  $x$  calculada em  $y = 0.2$  m nos tempos 3200 e 10000 segundos.

Afim de complementar os resultados, a Figura 6.27 mostra a variação da porosidade ao longo do tempo calculada no centro e na posição adjacente a fronteira direita do domínio total. Verifica-se que a porosidade sofreu pequenas variações ao longo do tempo, porém estas são fisicamente coerentes, pois próximo a fronteira, devido a rápida redução de pressão e consequente deformação volumétrica do material, a porosidade rapidamente se aproxima ao valor a ser alcançado em regime permanente, enquanto em  $x = 0$ , esta reduz mais lentamente acompanhando o comportamento da queda de pressão e da deformação volumétrica.

As tensões efetivas são outras variáveis bastante importantes na análise geomecânica, pois são necessárias para analisar critérios de estabilidade de poços, ativação de falhas em reservatório, operações de fraturamento hidráulico, acidificação, entre outras. Assim, a Figura 6.28 mostra a variação temporal da tensão efetiva vertical em  $x = 0$  e  $x = L$ , onde observa-se que o nível mais crítico de tensão está localizado na fronteira do domínio. Logo, caso fosse realizado alguma análise de resistência do meio, este seria o ponto mais preocupante.



**Figura 6.27** – Variação temporal da porosidade nas posições  $x=0$  e  $x=L$ .

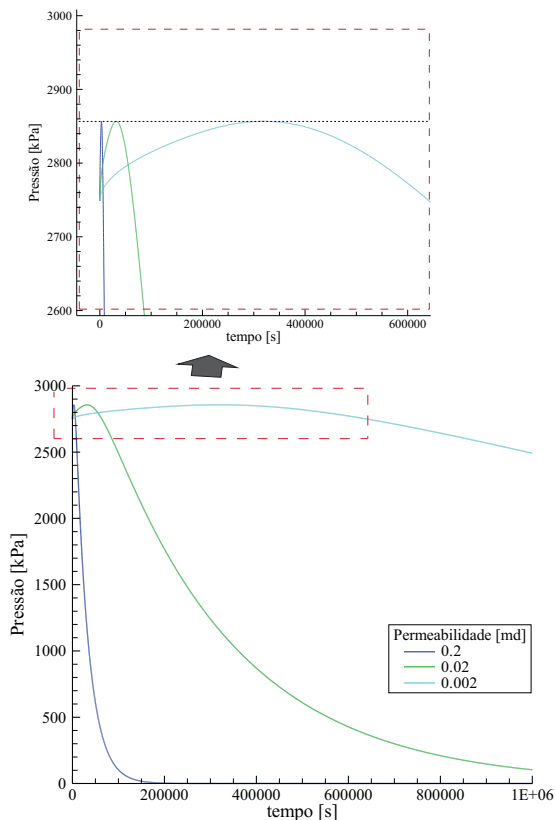


**Figura 6.28** – Variação temporal da tensão efetiva vertical nas posições  $x=0$  e  $x=L$ .

Nos resultados apresentados anteriormente, as propriedades físicas usadas na análise do efeito de Mandel-Cryer foram assumidas sempre as mesmas, listadas na Tabela 6.5. Porém, cabe salientar que dependendo das

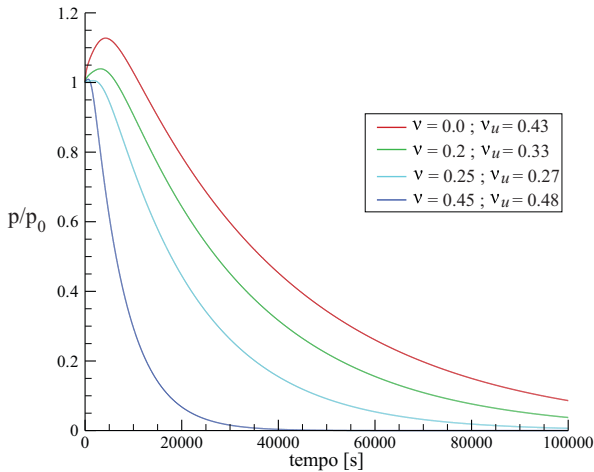
propriedades físicas adotadas para o material, este efeito pode ser pouco pronunciado, podendo ser em alguns casos totalmente inexistente. Por este motivo, na sequência são mostradas as influências da permeabilidade absoluta e do coeficiente de Poisson no efeito de Mandel-Cryer.

Pela Figura 6.29 nota-se que a permeabilidade absoluta não impacta na magnitude do efeito de Mandel-Cryer. Pois, como pode ser identificado na seção ampliada do gráfico, destacada pelo pontilhado vermelho, os máximos valores de pressão alcançados durante a solução são praticamente os mesmos para as três permeabilidades.



**Figura 6.29** – Influência da permeabilidade absoluta no efeito de Mandel-Cryer.

Já pela Figura 6.30 constata-se que o efeito de Mandel-Cryer é altamente dependente do coeficiente de Poisson. Pois, a medida que aumenta a diferença entre os valores dos coeficientes de Poisson drenado e não-drenado, mais pronunciado torna-se o efeito. Cabe salientar, que a magnitude do efeito não está vinculada com o valor do coeficiente de Poisson drenado, como comentado por Verruijt [35], e sim pela diferença entre os coeficientes nas condições drenada e não-drenada.



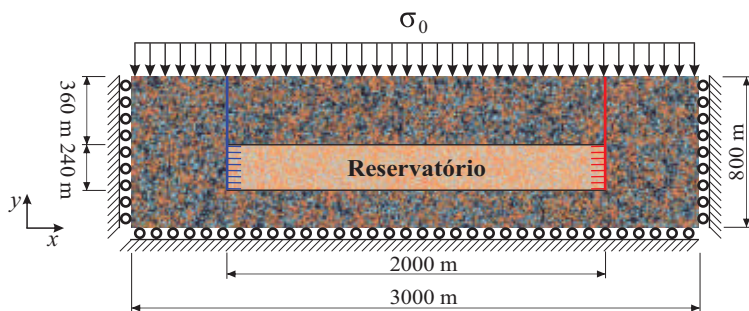
**Figura 6.30** – Influência do coeficiente de Poisson no efeito de Mandel-Cryer.

Com base nos resultados apresentados neste problema é possível concluir que o método numérico está resolvendo acuradamente as equações do fluxo e da geomecânica, pois a concordância entre as soluções numéricas e analíticas foi largamente comprovada. Além disso, a solução do acoplamento entre o fluxo e a geomecânica mostrou-se bastante robusto, pois seguindo o algoritmo de solução implementado neste trabalho, a convergência da solução foi alcançada rapidamente mesmo nas malhas mais grosseiras. Assim, a grande vantagem da característica conservativa do método dos volumes finitos, o qual por este motivo é largamente aplicado em soluções de mecânica dos fluidos, se fez benéfica também na solução das equações de equilíbrio de tensões do modelo geomecânico, proporcionando a robustez necessária para a acurada solução do acoplamento.

### 6.3 Simulação acoplada fluxo/geomecânica em um reservatório contendo um poço produtor e um injetor

Após a bem sucedida validação numérica e física do modelo realizada nos problemas testes mostrados anteriormente, nesta seção será apresentado um problema que busca reproduzir a física existente em processos de exploração de reservatórios de petróleo. Mesmo sendo um caso hipotético onde considerações físicas estão sendo adotadas, o problema é interessante para investigar o comportamento das variáveis envolvidas no acoplamento reservatório/geomecânica.

O problema é composto por um reservatório circundado por uma rocha não-reservatório, a qual está exposta a uma carga compressiva na sua fronteira superior, conforme ilustrado na Figura 6.31. Esta carga é aplicada para representar a sobrecarga causada pelo peso de outras rochas localizadas acima do reservatório fora do domínio de solução. O reservatório possui dois poços posicionados em suas extremidades, um produtor e outro injetor. As propriedades mecânicas e poroelásticas das rochas reservatório e não-reservatório são assumidas as mesmas, com exceção da permeabilidade, a qual é assumida ser muito maior na rocha reservatório.



**Figura 6.31** – Domínio de solução do problema, destacando o reservatório com seus dois poços, produtor (azul) e injetor (vermelho).

As condições de contorno aplicadas no modelo geomecânico são tensões cisalhantes nulas em todas as fronteiras, deslocamentos horizontais nulos nas fronteiras leste e oeste, deslocamento vertical nulo na fronteira

inferior e tensão normal  $\sigma_0$  na fronteira superior. Para o modelo de fluxo são consideradas todas as fronteiras seladas das rochas reservatório e não-reservatório, ou seja, não há troca de massa entre as rochas reservatório e não-reservatório. A saída e entrada de massa do reservatório é realizada pelos poços produtor e injetor, os quais são incorporados no modelo de fluxo como pressões prescritas em toda a extensão das fronteiras oeste e leste do reservatório, respectivamente.

Uma aplicação prática a qual pode ser relacionada com a modelagem deste problema corresponde a produção de reservatórios compartimentados, onde por algum evento geológico formaram-se regiões internas no reservatório sem comunicação de pressão entre elas. Assim, os resultados obtidos com a simulação deste modelo, tais como: estado de tensões no reservatório e suas vizinhanças, deslocamentos da estrutura causados pela produção, campos de deformações, variações de porosidade, comportamento da pressão no reservatório, são bastante úteis para o entendimento dos fenômenos físicos envolvidos na simulação geomecânica aplicada pa-

**Tabela 6.6** – Dados de entrada utilizados na simulação do reservatório.

Malha	-	60x40
Módulo de elasticidade transversal	$Pa$	$6,0 \times 10^9$
Coefficiente de Poisson drenado	-	0,20
Coefficiente de Poisson não drenado	-	0,33
Coefficiente de Biot	-	0,79
Compressibilidade da fase sólida	$Pa^{-1}$	$2,65 \times 10^{-11}$
Compressibilidade do fluido	$Pa^{-1}$	$3,03 \times 10^{-10}$
Porosidade	-	0,19
Permeabilidade absoluta do reservatório	$md$	2,0
Viscosidade do fluido	$Pa.s$	0,001
Tempo de simulação	$dias$	1250
Passo de tempo	$dias$	0,25
Pressão de fundo ( poço produtor )	$Pa$	0
Pressão de fundo ( poço injetor )	$Pa$	$60 \times 10^6$
Tensão aplicada no topo da estrutura	$Pa$	$1,0 \times 10^8$

ra este cenário.

Os valores das propriedades físicas e as principais considerações adotadas nas simulações seguem listadas na Tabela 6.6. Além dessas, o efeito da força peso não está sendo considerado, pois entende-se que este efeito pode ser desprezado dada a menor importância deste frente a elevada magnitude da carga aplicada no topo da estrutura.

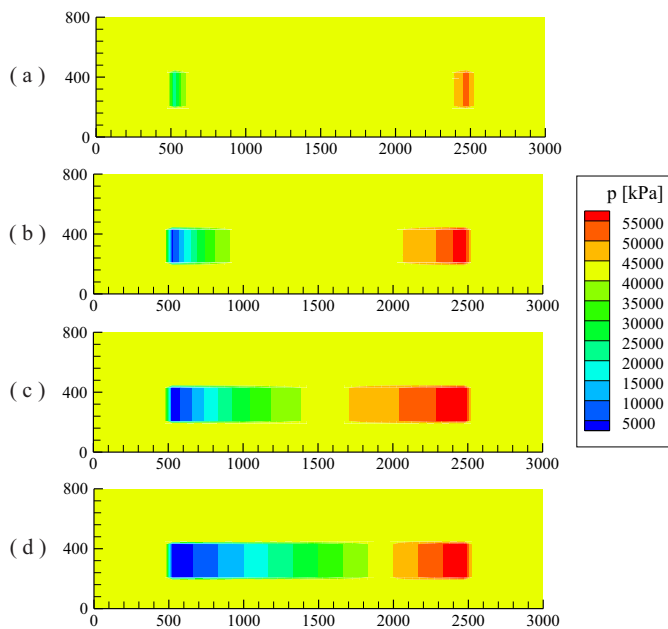
A inicialização do problema é realizada da mesma forma como vinha sendo feita nos problemas anteriores, onde resolve-se a condição não-drenada da rocha estando submetida a carga no topo da estrutura. Como resultado obtém-se o estado de equilíbrio de tensões inicial e a distribuição uniforme de pressão em todo o domínio.

Na sequência são apresentados os resultados mostrando os campos das variáveis e as variações destas ao longo de uma linha paralela ao eixo  $x$  passando pelo centro do reservatório, o qual está situado na cota  $y = 320m$ .

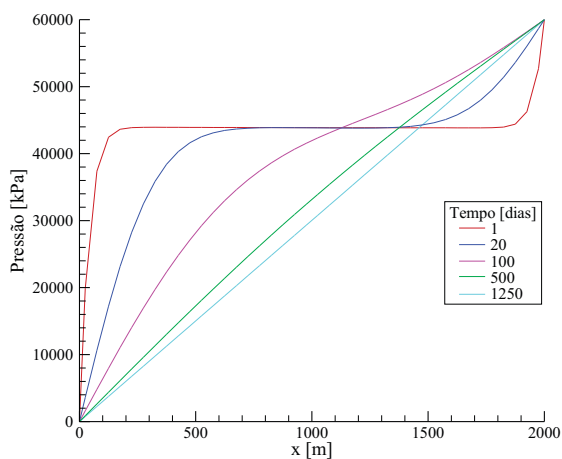
Observando os campos de pressão da Figura 6.32 pode-se concluir que as condições de contorno do fluxo estão bem postadas, pois o fluxo ocorre apenas no interior do reservatório, enquanto fora deste, a pressão mantém-se com o mesmo valor inicial durante todo o tempo de simulação, como era o esperado. Devido à geometria e às condições de contorno do problema, o modelo de fluxo que se estabelece no reservatório é linear, logo em regime permanente a pressão deve variar linearmente ao longo do eixo  $x$ . Tal comportamento pode ser detectado pela Figura 6.33, a qual apresenta a evolução da pressão no regime transiente e ao final dos 1250 dias a condição estabilizada em regime permanente.

A Figura 6.34 exibe a evolução do campo de tensões total vertical ao longo do tempo. Primeiramente, observa-se pela variação das tensões que o efeito da variação da pressão no reservatório afeta o estado de tensões em um horizonte bem maior ao acupado pelo reservatório. Isto fundamenta a necessidade de em uma análise de estado de tensões em um reservatório, o domínio de solução deve ser estendido além dos limites do reservatório. Esta extensão dependerá de vários parâmetros a serem analisados caso a caso, tais como: a magnitude da variação de pressão, o nível de tensões no meio, as propriedades mecânicas e poroelásticas das rochas, a presença de falhas na formação, entre outras. Pela Figura 6.35 nota-se que no interior do reservatório a tensão total  $\sigma_{yy}$  segue a mesma tendência da pressão, pois apresenta uma alta redução próximo ao poço produtor, enquanto pró-

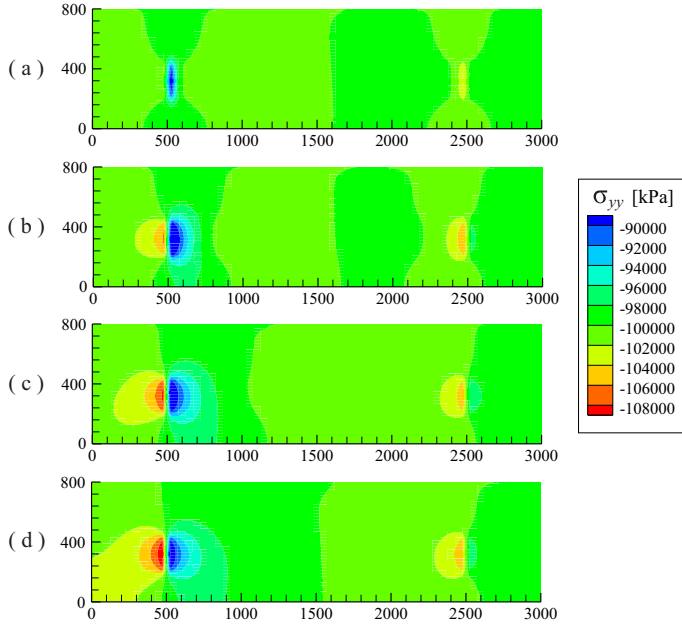




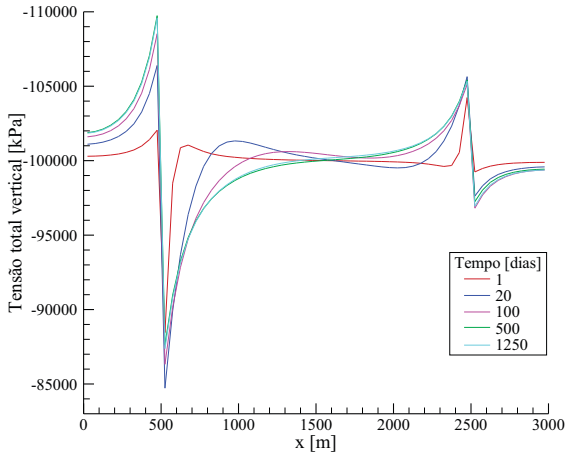
**Figura 6.32** – Campos de pressão obtidos nos tempos, (a) 1, (b) 20, (c) 100 e (d) 1250 dias.



**Figura 6.33** – Pressão ao longo do eixo  $x$  na posição  $y = 320\text{m}$  em alguns instantes de tempo.



**Figura 6.34** – Campos de tensão total vertical obtidos nos tempos, (a) 1, (b) 20, (c) 100 e (d) 1250 dias.



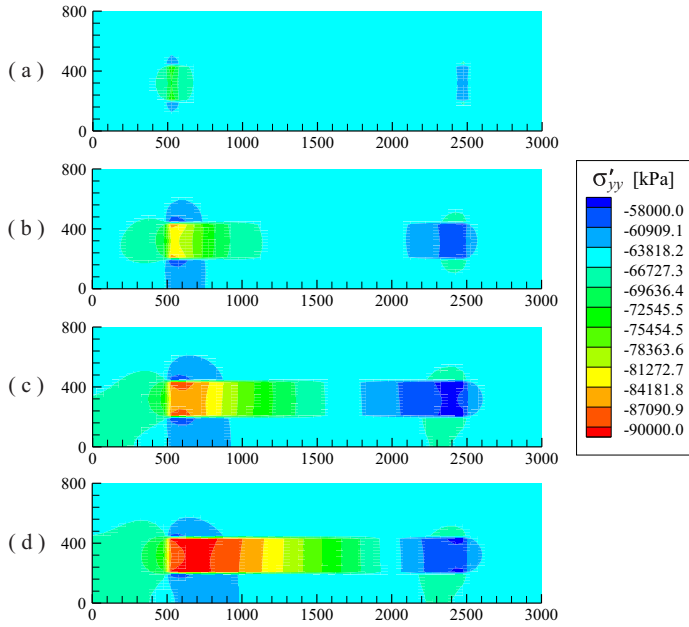
**Figura 6.35** – Tensão total vertical ao longo do eixo x na posição  $y = 320m$  em alguns instantes de tempo.

ximo ao injetor aumenta a níveis acima dos iniciais. Já na parte externa ao reservatório o comportamento não é o mesmo, pois a pressão não se altera, enquanto a tensão total sofre variações para manter o equilíbrio de forças na direção  $y$ , aumentando próximo ao produtor e reduzindo perto do injetor.

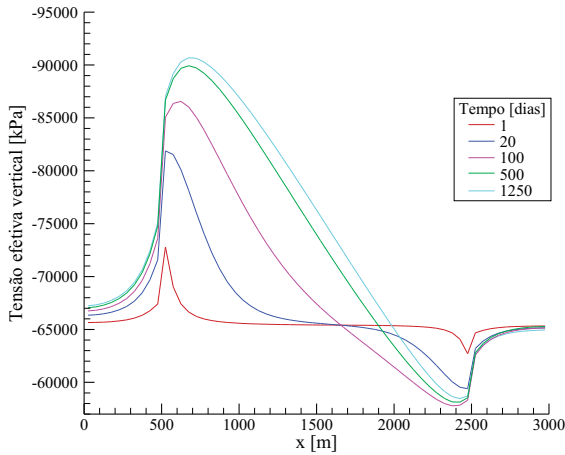
Nas Figuras 6.36 e 6.37 nota-se que as variações significativas da tensão efetiva vertical ocorrem no interior do reservatório. Nesta região o princípio das tensões efetivas fica bem evidente, pois nas proximidades do poço produtor, conforme a pressão do fluido diminui, a tensão efetiva na estrutura sólida aumenta, compensando a redução de pressão. Já próximo ao injetor tem-se uma redução da tensão efetiva, pois o aumento da pressão devido à injeção de fluido ajuda a suportar a carga  $\sigma_0$ . Ainda em 6.37, verifica-se que a tensão efetiva na rocha não-reservatório próximo aos poços segue as mesmas variações da tensão total  $\sigma_{yy}$ .

As Figuras 6.38 e 6.39 apresentam os resultados da tensão total horizontal. Esta variável é muito importante na análise de critérios de estabilidade de poço, pois ela é um limitante da janela de peso de lama a ser usada na perfuração dos poços. Assim, achou-se relevante incluí-la na apresentação dos resultados. Observa-se a elevada redução da tensão na região depletada do reservatório, com locais chegando a cair de 51.000 kPa para em torno de 35.000 kPa. No cenário da perfuração, levar em conta essa variação de tensão é extremamente importante, pois nesse menor nível de tensão a pressão necessária para fraturar a rocha é um valor consideravelmente inferior. Assim, para calcular o peso de lama adequado para não fraturar a formação, o conhecimento desta tensão é indispensável.

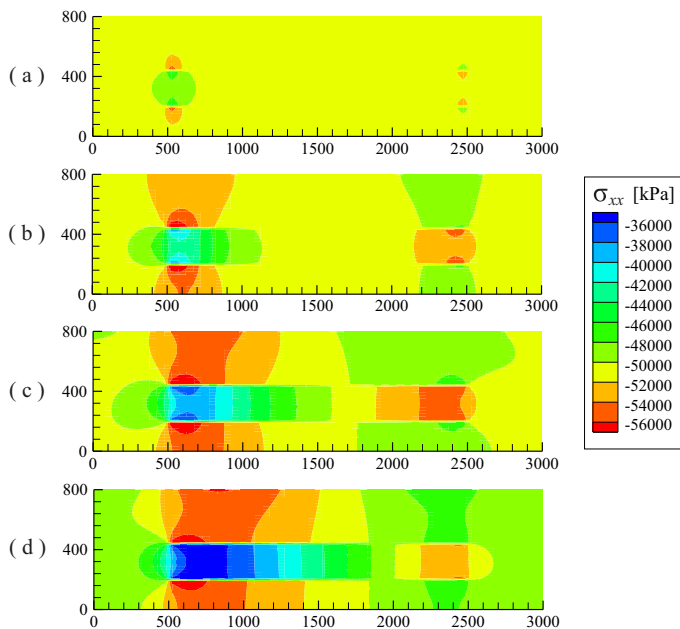
Outra informação importante adquirida com a simulação geomecânica são os deslocamentos ocorridos na formação devido à produção do reservatório. Na Figura 6.40 está apresentado o principal deles, o deslocamento vertical. O gráfico mostra que a imposição da carga na etapa de inicialização do problema gerou um deslocamento inicial de aproximadamente 3,27 m no topo da estrutura, e com o andamento da produção no reservatório, o máximo valor alcançado foi em torno de 3,52 m, quando a solução atingiu o regime permanente. Por completeza, a Figura 6.41 mostra os deslocamentos horizontais no centro do reservatório, nota-se a pequena magnitude destes comparada aos deslocamentos verticais. Estes deslocamentos são pouco relevantes para a análise geomecânica.



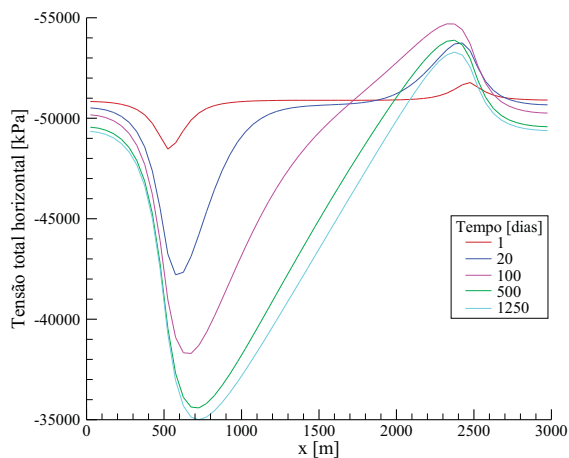
**Figura 6.36** – Campos de tensão efetiva vertical obtidos nos tempos, (a) 1, (b) 20, (c) 100 e (d) 1250 dias.



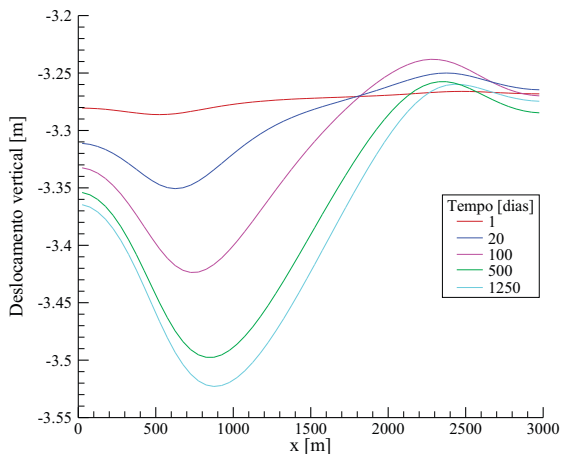
**Figura 6.37** – Tensão efetiva vertical ao longo do eixo x na posição  $y = 320m$  em alguns instantes de tempo.



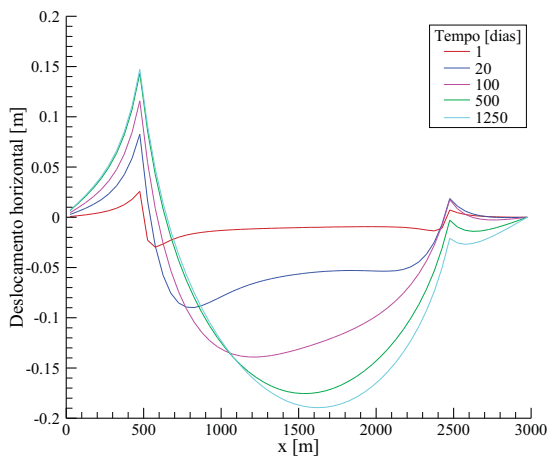
**Figura 6.38** – Campos de tensão total horizontal obtidos nos tempos, (a) 1, (b) 20, (c) 100 e (d) 1250 dias.



**Figura 6.39** – Tensão total horizontal ao longo do eixo  $x$  na posição  $y = 320m$  em alguns instantes de tempo.



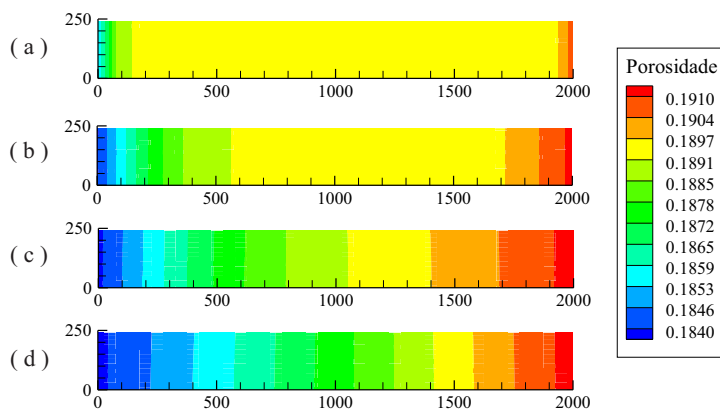
**Figura 6.40** – Deslocamento vertical no topo da estrutura em alguns instantes de tempo.



**Figura 6.41** – Deslocamento horizontal ao longo do eixo  $x$  na posição  $y = 320$  m em alguns instantes de tempo.

No acoplamento reservatório/geomecânica, um dos parâmetros que acopla os modelos de fluxo e geomecânico é a porosidade. Esta variável carrega informações vindas do modelo geomecânico e repassa para o modelo de fluxo, assim, em todo nível de tempo simulado, o modelo de fluxo

é afetado pelo geomecânico. No algoritmo iterativo elaborado neste trabalho, estas informações são passadas várias vezes de um modelo para o outro em cada passo de tempo, até a convergência ser alcançada. Buscando mostrar o comportamento desta variável na simulação, a Figura 6.42 traz a evolução temporal da porosidade no interior do reservatório. Nota-se a coerência física da solução, pois a porosidade está gradativamente reduzindo próximo ao poço produtor e aumentando perto do injetor. Lembrando que o valor inicial da porosidade era 19%, com as propriedades físicas adotadas para este problema, não houveram variações significativas da porosidade durante a simulação. Para tornar mais evidente esta variação necessitaria usar propriedades de rochas menos resistentes ou mais freáveis, obtendo assim maiores deformações, ou aplicando gradientes de pressões mais severos. Porém, não optou-se por seguir este caminho, para não correr o risco de ultrapassar o regime elástico da rocha, onde estaríamos violando o modelo aqui empregado.



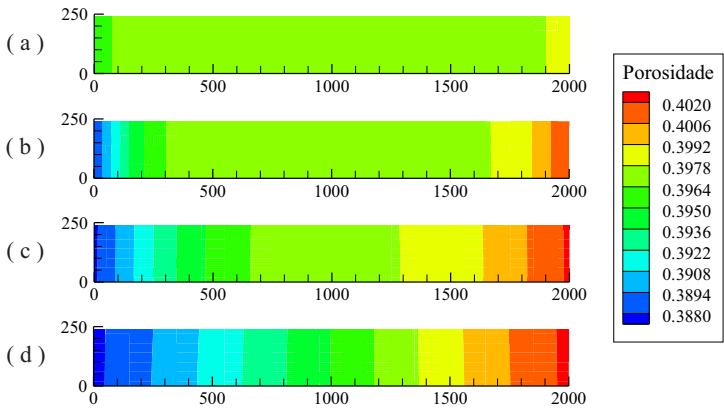
**Figura 6.42** – Campos de porosidade obtidos nos tempos, (a) 1, (b) 20, (c) 100 e (d) 1250 dias.

Afim de obter variações mais expressivas da porosidade, então simulou-se o mesmo problema em questão aplicando propriedades do arenito Boise. As condições de contorno e parâmetros numéricos foram assumidos os mesmos. As propriedades físicas desta rocha seguem na Tabela 6.7, a qual apresenta resistência mecânica pouco inferior a anterior e com maiores valores de porosidade e coeficiente de Biot.

**Tabela 6.7** – Propriedades da rocha arenito Boise, retiradas de [14].

Módulo de elasticidade transversal	$Pa$	$4,2 \times 10^9$
Coefficiente de Poisson drenado	-	0,15
Coefficiente de Poisson não drenado	-	0,31
Coefficiente de Biot	-	0,85
Compressibilidade da fase sólida	$Pa^{-1}$	$3,26 \times 10^{-11}$
Porosidade	-	0,40

Pela Figura 6.43, os resultados obtidos também apresentaram variação de porosidade pouco significativa, pois, a maior variação detectada foi próxima ao poço produtor, onde esta reduziu de 40% para 38,8%. Essa pequena variação também constatada nesta segunda rocha analisada, deve-se a sua elevada resistência mecânica, embora pouco inferior a rocha analisada anteriormente. Para alcançar variações mais expressivas de porosidade, seria interessante empregar propriedades de rochas pouco competentes e bastante freáveis.



**Figura 6.43** – Campos de porosidade obtidos na simulação usando propriedades do arenito Boise, correspondentes aos tempos, (a) 1, (b) 20, (c) 100 e (d) 1250 dias.

Com os resultados numéricos deste problema, constatou-se que todo o desenvolvimento matemático e numérico elaborado neste trabalho, ba-



seado na premissa de solução usando uma única malha computacional tanto para o modelo de reservatório quanto para o geomecânico aplicando o método dos volumes finitos, é robusto suficiente para prever os efeitos geomecânicos fundamentais na simulação de um reservatório. Com o código computacional implementado foi possível a análise e compreensão dos fenômenos físicos básicos envolvidos, entre os quais, principalmente relacionados ao comportamento das tensões atuantes na formação.



## CONCLUSÕES

O trabalho aqui proposto teve por contribuição principal desenvolver uma metodologia de solução numérica capaz de resolver problemas acoplados reservatório/geomecânica aplicando um único método numérico na discretização das equações dos modelos de reservatório e geomecânico, empregando uma mesma malha computacional para ambos os modelos. Neste enfoque, a metodologia apresentou ser inovadora comparada com as estratégias de solução adotadas pelos principais simuladores comerciais, os quais resolvem os modelos de reservatório e geomecânico com diferentes métodos numéricos em diferentes malhas computacionais. Assim, toda a formulação numérica foi desenvolvida empregando a discretização do método dos volumes finitos em ambos os modelos, buscando se beneficiar da natureza conservativa do método numérico para garantir uma solução fisicamente consistente do acoplamento. Embora toda a formulação ter sido realizada para um problema acoplado fluido/estrutura, esta metodologia pode ser facilmente estendida para resolver outros problemas multifísicos, como por exemplo, termoeelásticos e termoporoelásticos.

Quanto à formulação matemática dos modelos, o paralelo realizado entre as velocidades envolvidas no escoamento em meios porosos deformáveis e não deformáveis foi de suma importância para o entendimento de cada componente. Da forma como foram definidas e explicadas, ficou claro o significado físico de cada velocidade. Esta dedução introduziu novas definições e contribuiu para o esclarecimento das velocidades envolvidas, as quais algumas vezes são apresentadas na literatura de forma

confusa e sem sentimento físico.

Na formulação numérica, a solução das equações da geomecânica aplicando o método dos volumes finitos foi encarada como um dos principais desafios do presente trabalho, visto que estas não são comumente resolvidas com este método numérico. Assim, toda a integração das equações da geomecânica e aplicação das condições de contorno foram apresentadas de forma bastante detalhada. Nesta tarefa, as equações da geomecânica foram integradas na forma conservativa e não-conservativa, onde foi constatado que as duas formas de integração resultavam em diferentes coeficientes das equações algébricas. Além disso, verificou-se que integrando na forma conservativa, os fluxos de quantidade de movimento aparecem naturalmente nas faces do volume de controle, reproduzindo o balanço realizado para deduzir as equações diferenciais, enquanto na forma não-conservativa, os fluxos não são novamente reproduzidos. Cabe salientar também que a integração na forma conservativa torna bastante simples a aplicação das condições de contorno, ao contrário da forma não-conservativa, onde complicações extras são acrescentadas, principalmente relacionadas às derivadas cruzadas das tensões cisalhantes. Assim, a forma conservativa com que as equações da geomecânica foram integradas foi fundamental para o sucesso da solução do acoplamento fluido/estrutura aplicando o método dos volumes finitos.

Outro ponto positivo da metodologia refere-se à solução do acoplamento iterativo, onde devido ao arranjo das variáveis na malha e o uso de uma mesma malha computacional para ambos os modelos de reservatório e geomecânico, as variáveis de acoplamento usadas na troca de informações entre os modelos durante o ciclo iterativo da solução não necessitam ser interpoladas, pois as mesmas são calculadas no mesmo ponto da malha.

Com a solução numérica dos problemas testes propostos, a validação numérica da metodologia foi largamente comprovada. Os resultados mostraram que o método numérico resolveu fielmente as equações diferenciais dos modelos, pois as soluções numéricas apresentaram grande concordância com as soluções analíticas em todos os problemas testados. Para o segundo problema, onde o domínio era formado por dois materiais com diferentes propriedades, mesmo para altas razões de permeabilidade entre os meios, a solução numérica até mesmo próxima à interface dos dois materiais praticamente coincidiu com a analítica. Com

a solução do problema de Mandel, ratificou-se que o acoplamento reservatório/geomecânica foi acuradamente resolvido, pois o efeito de Mandel-Cryer foi precisamente identificado, comprovando que as interações entre o sólido e o fluido foram fielmente respeitadas durante as soluções. Neste mostrou-se que o efeito de Mandel-Cryer é fortemente influenciado pela diferença entre os coeficientes de Poisson drenado e não drenado do meio, e não é influenciado por variações da permeabilidade absoluta.

A aplicabilidade da formulação aqui desenvolvida na solução de problemas reais de análises geomecânicas em reservatórios de petróleo foi abordada na solução do último problema proposto. Com a solução numérica foi capaz de prever todo o comportamento do estado de tensões no reservatório e rochas adjacentes durante o período de produção. Estas informações são muito importantes para inúmeras análises relacionadas a perfuração de novos poços no reservatório. A compactação no reservatório e consequente subsidência em superfície também foi possível de ser estimada com a solução. Quanto à variação da porosidade dada pela compactação do reservatório, para as propriedades físicas consideradas, esta apresentou-se pouco significativa durante as simulações, embora as variações foram fisicamente consistentes.

Embora na formulação desenvolvida tenham sido considerados modelos de fluxo e geomecânico simplificados, o presente trabalho pode ser considerado como um passo importante na busca em resolver tal problema com métodos numéricos unificados. Além disso, pesquisas buscam resolver o acoplamento reservatório/geomecânica com solução totalmente acoplada, onde todas as equações algébricas são resolvidas em um único sistema linear, para isso, o uso de uma mesma forma de discretização para ambos os modelos é extremamente necessária. Assim, para agregar robustez à metodologia desenvolvida e possibilitar que tal seja aplicada em problemas mais gerais, as pesquisas e análises devem ser estendidas. Modelos mais sofisticados de fluxo e geomecânicos em meios porosos heterogêneos e anisotrópicos devem ser testados. Níveis de acoplamento entre os modelos também podem ser trabalhados buscando reduzir o tempo de computação das soluções. Assim, uma série de trabalhos podem ser realizados trazendo enriquecimento à metodologia aqui apresentada.



# REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] ABOUSLEIMAN, Y.; CHENG, A. H.-D.; CUI, L.; DETOURNAY, E.; ROEGIERS, J. C. **Mandel's problem revisited.** *Geotechnique*, v. 46, pp. 187–195, 1996.
- [2] AZIZ, K.; SETTARI, A. **Petroleum Reservoir Simulation.** Applied Science Publishers, New York City, 1979.
- [3] BIOT, M. A. **General Theory of Three-Dimensional Consolidation.** *Journal of Applied Physics*, v. 12, pp. 155–164, 1941.
- [4] BIOT, M. A. **Theory of Elasticity and Consolidation for a Porous Anisotropic Solid.** *Journal of Applied Physics*, v. 26, pp. 182–185, 1955.
- [5] BIOT, M. A. **Theory of Deformation of a Porous Viscoelastic Anisotropic Solid.** *Journal of Applied Physics*, v. 27, pp. 459–467, 1956a.
- [6] BIOT, M. A. **Theory of Propagation of Elastic Waves in a Fluid-Saturated Porous Solid i. Low Frequency Range.** *The Journal of Acoustical Society of America*, v. 28, pp. 168–178, 1956b.
- [7] CHARLEZ, P. **Mechanics of Porous Media.** Rotterdam: Balkema, 1995.
- [8] CHEN, Z.; HUAN, G.; MA, Y. **Computational Methods for Multiphase Flows in Porous Media.** Southern Methodist University Dallas, Texas, 2006.
- [9] CHIN, L.; THOMAS, L. **Fully Coupled Analysis of Improved Oil Recovery by Reservoir Compaction.** *Society of Petroleum Engineers*, pp. 1–10, 1999.
- [10] CHIN, L. Y.; RAGHAVAN, R.; THOMAS, L. **Fully Coupled Geomechanics and Fluid-Flow Analysis of Wells with Stress-Dependent Permeability.** *Society of Petroleum Engineers*, v. 5, 2000.

- [11] CRYER, C. W. **A comparison of the three-dimensional consolidation theories of Biot and Terzaghi.** *Q. J. Mech. Appl. Math.*, v. 16, pp. 401–412, 1963.
- [12] DEAN, R.; GAI, X.; STONE, C.; MINKOFF, S. **A Comparison of Techniques for Coupling Porous Flow and Geomechanics.** *Society of Petroleum Engineers*, pp. 132–140, 2006.
- [13] DESAI, C. S.; SIRIWARDANE, H. J. **Constitutive Laws for Engineering Materials with Emphasis on Geologic Materials.** Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, 1984.
- [14] DETOURNAY, E.; CHENG, A. H.-D. **Fundamentals of Poroelasticity.** In *Comprehensive Rock Engineering: Principles, Practise and Projects.*, v. 2, pp. 113–171, 1993.
- [15] GEERTSMA, J. **The Effect of Fluid Pressure Decline on Volumetric Changes of Porous Rocks.** *Petroleum Transactions, AIME*, v. 210, pp. 331–340, 1957.
- [16] GEERTSMA, J. **Problems of Rock Mechanics in Petroleum Production Engineering.** In *Proceedings of the First Congress of Internacional Society of Rock Mechanics, Lisboa*, v. 1, pp. 585–594, 1966.
- [17] GIBSON, R. E.; KNIGHT, K.; TAYLOR, P. W. **A critical experiment to examine theories if three-dimensional consolidation.** *Proc. Eur. Conf. Soil Mech.*, v. 1, pp. 69–76, 1963.
- [18] GUTIERREZ, M.; LEWIS, R. **The Role of Geomechanics in Reservoir Simulation.** *Society of Petroleum Engineers*, pp. 439–448, 1998.
- [19] HURTADO, F. S. **Uma Formulação de Volumes Finitos Baseada em Elementos para a Simulação do Deslocamento Bifásico Imiscível em Meios Porosos.** Dissertação de Mestrado, Departamento de Engenharia Mecânica - Universidade Federal de Santa Catarina, Centro Tecnológico. Florianópolis - Brasil, 2005.
- [20] LUMSDAINE, A.; LEE, L.-Q.; SIEK, J. **The Iterative Template Library.** <http://osl.iu.edu/research/itl/>.
- [21] MALISKA, C. R. **Transferência de Calor e Mecânica dos Fluidos Computacional.** Segunda Edição. Livros Técnicos e Científicos Editora S.A. Rio de Janeiro, 2004.



- [22] MANDEL, J. **Consolidation des sols.** *Geotechnique*, v. 3, pp. 287–299, 1953.
- [23] MINKOFF, S. E.; STONE, C. M.; BRYANT, S.; PESZYNSKA, M.; WHEELER, M. F. **Coupled Fluid Flow and Geomechanical Deformation Modeling.** *Journal of Petroleum Science and Engineering*, v. 38, pp. 37–56, 2003.
- [24] PAN, F. **Development and Application of a Coupled Geomechanics Model for a Parallel Compositional Reservoir Simulator.** Dissertation of the Requirements for the Degree of Doctor of Philosophy, The University of Texas at Austin, 2009.
- [25] PAN, F.; SEPEHRONON, K.; CHIN, L. **Development of a Coupled Geomechanics Model for a Parallel Compositional Reservoir Simulator.** *Society of Petroleum Engineers*, 2007.
- [26] RICE, J. R.; CLEARY, M. P. **Some Basic Stress Diffusion Solutions for Fluid-Saturated Elastic Porous Media with Compressible Constituents.** *Reviews of Geophysics and Space Physics*, v. 14, pp. 227–241, 1976.
- [27] SAMIER, P.; ONAISI, A.; FONTAIRE, G. **Comparisons of Uncoupled and Various Coupling Techniques for Practical Field Examples.** *Society of Petroleum Engineers*, pp. 89–102, 2006.
- [28] SETTARI, A.; MOURITS, F. **A Coupled Reservoir and Geomechanical Simulation System.** *Society of Petroleum Engineers*, pp. 219 – 226, 1998.
- [29] SETTARI, A.; WALTERS, D. **Advances in Coupled Geomechanical and Reservoir Modeling With Applications to Reservoir Compaction.** *Society of Petroleum Engineers*, pp. 334–342, 2001.
- [30] TERZAGHI, K. **Die Berechnung der Durchlässigkeitsziffer des Tones aus dem Verlauf der Hydrodynamischen Spannungsercheinungen.** *Sitz. Akad. Wissen. Wien, Math. Naturwiss*, v. 2a, pp. 125–128, 1923.
- [31] THOMAS, L.; CHIN, L.; PIERSON, R.; SYLTE, J. **Coupled Geomechanics and Reservoir Simulation.** *Society of Petroleum Engineers*, pp. 350 – 358, 2003.
- [32] TRAN, D.; SETTARI, A.; NGHIEM, L. **New Iterative Coupling Between a Reservoir Simulator and a Geomechanics Module.** *Society of Petroleum Engineers*, pp. 362 – 369, 2004.

- [33] TRAN, D.; NGHIEM, L.; BUCHANAN, L. **Improved Iterative Coupling of Geomechanics with Reservoir Simulation.** *Society of Petroleum Engineers*, 2005.
- [34] VAN DER VORST, H. A. **Bi-CGSTAB: A Fast and Smoothly Converging Variant of Bi-CG for the Solution of Nonsymmetric Linear Systems.** *SIAM Journal on Scientific Computing*, v. 13, pp. 631–644, 1992.
- [35] VERRUIJT, A. **Theory and Problems of Poroelasticity.** Delft University of Technology, 2013.
- [36] WANG, H. F. **Theory of Linear Poroelasticity with Applications to Geomechanics and Hydrogeology.** Princeton University Press, 2000.

# A

## CORRELAÇÕES DAS CONSTANTES POROELÁSTICAS

Este apêndice apresenta correlações entre as principais propriedades poroelásticas para um material poroso isotrópico e linear. Na primeira seção estão mostradas correlações entre constantes definidas por Biot, o qual trata o meio poroso como um sistema fluido-estrutura. Na sequência relacionam estas propriedades com as propriedades micromecânicas. E por fim, apresentam casos particulares da abordagem micromecânica.

### A.1 Constantes poroelásticas para um sistema fluido/estrutura

Nesta seção são apresentadas correlações entre as constantes introduzidas por Biot e também entre as constantes determinadas sob condição não drenada.

$$\alpha = \frac{K_b}{H} = \frac{2(1+\nu)G}{3(1-2\nu)H} \quad (\text{A.1})$$

$$\frac{1}{R} = \frac{\alpha}{K_b B} \quad (\text{A.2})$$

$$B = \frac{R}{H} \quad (\text{A.3})$$

$$\frac{1}{Q} = \frac{1}{R} - \frac{\alpha}{H} = \frac{\alpha}{K_b^u B} \quad (\text{A.4})$$

$$K_b = \frac{E}{3(1-2\nu)} \quad (\text{A.5})$$

$$E = 2G(1+\nu) \quad (\text{A.6})$$

$$K_b^u = \frac{K_b}{1-\alpha B} \quad (\text{A.7})$$

$$B = \frac{3(\nu^u - \nu)}{\alpha(1+\nu^u)(1-2\nu)} \quad (\text{A.8})$$

## A.2 Constantes poroelásticas definidas na abordagem micromecânica

Aqui as constantes da seção anterior são relacionadas com as constantes micromecânicas (compressibilidades e porosidade).

$$\frac{1}{H} = \frac{1}{K_b} - \frac{1}{K_s'} \quad (\text{A.9})$$

$$\frac{1}{R} = \left( \frac{1}{K_b} - \frac{1}{K_s'} \right) + \phi \left( \frac{1}{K_f} - \frac{1}{K_\phi} \right) \quad (\text{A.10})$$

$$\alpha = 1 - \frac{K_b}{K_s'} \quad (\text{A.11})$$

$$\frac{1}{K_p} = \frac{\alpha}{\phi K_b} \quad (\text{A.12})$$

$$K_b^u = K_b \left[ 1 + \frac{\left( 1 - \frac{K_b}{K_s'} \right)^2}{\frac{K_b}{K_s'} \left( 1 - \frac{K_b}{K_s'} \right) + \phi \left( \frac{K_b}{K_f} - \frac{K_b}{K_\phi} \right)} \right] \quad (\text{A.13})$$

$$B = 1 - \frac{\phi \left( \frac{K_b}{K_f} - \frac{K_b}{K_\phi} \right)}{\left( 1 - \frac{K_b}{K'_s} \right) + \phi \left( \frac{K_b}{K_f} - \frac{K_b}{K_\phi} \right)} \quad (\text{A.14})$$

$$\frac{1}{Q} = \frac{K_b}{K'_s} \left( \frac{1}{K_b} - \frac{1}{K'_s} \right) + \phi \left( \frac{1}{K_f} - \frac{1}{K_\phi} \right) \quad (\text{A.15})$$

### A.3 Casos particulares

Esta seção mostra que as correlações da seção A.2 são simplificadas para casos limites dos constituintes sólido e líquido.

- **Constituinte sólido incompressível** ( $K_b/K'_s \ll 1$  e  $K_b/K_\phi \ll 1$ )

Neste caso a compressibilidade da matriz sólida é negligenciada comparada com a compressibilidade total. Assim, as expressões da seção A.2 são reduzidas para

$$\alpha = 1 \quad (\text{A.16})$$

$$K_b^u = K_b \left( 1 + \frac{K_f}{\phi K_b} \right) \quad (\text{A.17})$$

$$B = 1 - \frac{1}{1 + \frac{K_f}{\phi K_b}} \quad (\text{A.18})$$

$$Q = \frac{K_f}{\phi} \quad (\text{A.19})$$

- **Constituintes sólido e fluido incompressíveis** ( $K_b/K'_s \ll 1$ ,  $K_b/K_\phi \ll 1$  e  $K_b/K_f \ll 1$ )

Esta é uma situação limite onde as constantes poroelásticas assumem seus valores máximos. Analisando as expressões do caso anterior e substituindo  $K_f \rightarrow \infty$ , chega-se a

$$\alpha = 1 \quad (\text{A.20})$$

$$K_b^u \rightarrow \infty \quad (\text{A.21})$$

$$B = 1 \quad (\text{A.22})$$

$$Q \rightarrow \infty \quad (\text{A.23})$$

• **Constituinte fluido altamente compressível** ( $K_f/K_b \ll 1$ )

Para este caso, as expressões resultam em

$$K_b^u = K_b \left( 1 + \frac{\alpha^2 K_f}{\phi K_b} \right) \quad (\text{A.24})$$

$$B = \frac{\alpha K_f}{\phi K_b} \quad (\text{A.25})$$

$$Q = \frac{K_f}{\phi} \quad (\text{A.26})$$

Para um caso limite com  $K_f \rightarrow 0$ , as constantes  $B \rightarrow 0$ ,  $K_b^u \rightarrow K_b$  e  $Q \rightarrow 0$ , ou seja, o material poroso comporta-se como um material elástico sem fluido [14].

# B

## DEDUÇÃO DOS COEFICIENTES DA EQUAÇÃO GOVERNANTE PARA ESCOAMENTO MONOFÁSICO

Neste apêndice são apresentadas as deduções dos coeficientes das derivadas parciais da equação 3.58 a partir dos coeficientes da equação 3.57.

- **Coeficiente I**

Este coeficiente é dado por

$$I = \frac{\phi}{K_f} + \frac{(1-\phi)}{K_s} - \frac{K_b}{K_s^2} \quad (\text{B.1})$$

Aplicando as definições das compressibilidades 2.41 à 2.44 e a relação para o coeficiente de Biot  $\alpha$ , dada por

$$\alpha = 1 - \frac{K_b}{K_s} = 1 - \frac{c_s}{c_b} \quad (\text{B.2})$$

tem-se

$$\mathbf{I} = \frac{\phi}{K_f} + \frac{1}{K_s} \left[ (1 - \phi) - \frac{K_b}{K_s} \right] = \frac{\phi}{K_f} + \frac{1}{K_s} \left[ -\phi + 1 - \frac{K_b}{K_s} \right] \quad (\text{B.3})$$

logo,

$$\mathbf{I} = \phi c_f + c_s(\alpha - \phi) \quad (\text{B.4})$$

### • Coeficiente II

O coeficiente II é definido por

$$\mathbf{II} = \mathbf{m}^T - \frac{\mathbf{m}^T \mathbb{D}}{3K_s} \quad (\text{B.5})$$

Para o modelo constitutivo elástico linear, a matriz constitutiva é dada por

$$\mathbb{D} = \begin{pmatrix} 2G + \lambda & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & 2G + \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda & 2G + \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & G & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & G \end{pmatrix} \quad (\text{B.6})$$

Assim, sabendo que

$$\mathbf{m}^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{B.7})$$

tem-se

$$\mathbf{m}^T \cdot \mathbb{D} = \begin{bmatrix} 2G + 3\lambda & 2G + 3\lambda & 2G + 3\lambda & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{B.8})$$

A relação  $2G + 3\lambda$  pode ser expressa em função das compressibilidades. Assim, fazendo uso de A.6 e 3.5, tem-se

$$2G + 3\lambda = \frac{E}{1 + \nu} + \frac{3E\nu}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} = \frac{E}{(1 - 2\nu)} \quad (\text{B.9})$$

Assim, de A.5, obtém-se



$$2G + 3\lambda = 3K_b \quad (\text{B.10})$$

Logo, o termo  $\mathbf{\Pi}$  é definido por

$$\mathbf{\Pi} = \begin{bmatrix} 1 - \frac{K_b}{K_s} & 1 - \frac{K_b}{K_s} & 1 - \frac{K_b}{K_s} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{B.11})$$

ou,

$$\mathbf{\Pi} = \begin{bmatrix} \alpha & \alpha & \alpha & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{B.12})$$



## C

## SOLUÇÕES ANALÍTICAS

O objetivo deste apêndice é apresentar as soluções analíticas dos problemas utilizados na validação numérica do modelo aqui estudado, sem entrar no desenvolvimento passo a passo das soluções, e sim apenas expondo as equações resultantes da solução analítica com as observações relevantes e as fontes das quais foram obtidas.

## C.1 Problema de Terzaghi

As soluções para as variáveis pressão e deslocamento em função do espaço e do tempo apresentadas na sequência foram retiradas de Wang [36]. Onde estas foram obtidas considerando o eixo  $y$  positivo no sentido para baixo da coluna, com a origem  $y = 0$  sendo assumida no topo da mesma. Desta forma, a pressão do fluido é definida por

$$p(y, t) = \frac{4\gamma\sigma_0}{\pi} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{2j+1} \exp \left[ -\frac{(2j+1)^2 \pi^2 c t}{4h^2} \right] \sin \left[ \frac{(2j+1)\pi y}{2h} \right] \quad (\text{C.1})$$

onde

$$\gamma = \frac{B(1+\nu^u)}{3(1-\nu^u)} \quad (\text{C.2})$$

e  $c$  é a conhecida constante de consolidação, dada por

$$c = \frac{2KG(1-\nu)(v^u - \nu)}{\mu\alpha^2(1-\nu^u)(1-2\nu)^2} \quad (C.3)$$

A expressão que descreve o deslocamento vertical apresenta a seguinte forma

$$v(y, t) = v_i + \frac{(1-2\nu)\alpha\gamma\sigma_0}{2G(1-\nu)} \left\{ (h-y) - \frac{8h}{\pi^2} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{(2j+1)^2} \exp \left[ -\frac{(2j+1)^2\pi^2 c t}{4h^2} \right] \cos \left[ \frac{(2j+1)\pi y}{2h} \right] \right\} \quad (C.4)$$

onde  $v_i$  é o deslocamento inicial da coluna, dado por

$$v_i = \frac{(1-2\nu^u)\sigma_0}{2G(1-\nu^u)}(h-y) \quad (C.5)$$

## C.2 Problema da coluna poroelástica com dois materiais.

Na comparação entre os resultados numérico e analítico para este problema, fez uso apenas da solução analítica da distribuição de pressão do fluido. Esta solução foi obtida de Verruijt [35], o qual considerou a coluna poroelástica formada por dois materiais com diferentes propriedades de compressibilidade e permeabilidade. A origem do sistema de coordenadas fixou-se na interface entre os dois materiais, conforme Figura 6.7. Quanto a notação indicial, adotou-se índice 1 para referir-se à propriedades do meio poroso inferior e 2 do meio superior. Assim, para  $y < 0$  a pressão é dada por

$$\frac{p(y, t)}{p_0} = 2 \sum_{j=0}^{\infty} \left\{ \frac{\cos(A_j) \cos(A_j y / h_1) \exp(-A_j^2 t / t_1)}{R_j} - \frac{\sin(A_j) \sin(A_j y / h_1) \exp(-A_j^2 t / t_1)}{R_j} \right\} \quad (C.6)$$

enquanto para  $y > 0$ ,

$$\frac{p(y, t)}{p_0} = 2 \sum_{j=0}^{\infty} \left\{ \frac{\cos(A_j) \cos(\beta A_j y / h_2) \exp(-A_j^2 t / t_1)}{R_j} - \frac{\omega \sin(A_j) \sin(\beta A_j y / h_2) \exp(-A_j^2 t / t_1)}{R_j} \right\} \quad (\text{C.7})$$

com

$$R_j = A_j((1 - \omega\beta) \cos(\beta A_j) \sin(A_j) + (\omega + \beta) \sin(\beta A_j) \cos(A_j)) \quad (\text{C.8})$$

onde  $p_0$  é a pressão inicial do fluido distribuída uniformemente no meio. E  $A_j$  são as raízes da equação a seguir.

$$F(A_j) = -\omega \sin(\beta A_j) \sin(A_j) + \cos(\beta A_j) \cos(A_j) \quad (\text{C.9})$$

A constante  $\beta$  é escrita em função dos tempos de consolidação

$$t_1 = \frac{h_1^2}{c_1} \quad ; \quad t_2 = \frac{h_2^2}{c_2} \quad (\text{C.10})$$

na forma

$$\beta = \sqrt{\frac{t_2}{t_1}} \quad (\text{C.11})$$

e  $\omega$  é uma relação das compressibilidades e permeabilidades do meio poroso <sup>1</sup>.

### C.3 Problema de Mandel

As soluções analíticas apresentadas na sequência foram extraídas de Abousleiman *et al.* [1] e adequadas com a simbologia adotada neste texto.

A geometria e as condições de contorno do problema implicam que os planos horizontais permanecem paralelos durante a compactação da

---

<sup>1</sup>Ver mais detalhes em [35].

amostra, e o fluxo do fluido possui componente apenas na direção horizontal. Com isso, a tensão vertical e a pressão de poros são funções apenas de  $x$  e  $t$ . Resumidamente, com as condições de contorno adotadas, as principais variáveis envolvidas no problema são funções de,

$$\dot{m}_x = f(x, t) \quad (C.12)$$

$$\dot{m}_y = 0 \quad (C.13)$$

$$\varepsilon_{xx} = f(x, t) \quad (C.14)$$

$$\varepsilon_{yy} = f(t) \quad (C.15)$$

$$\sigma_{xx} = 0 \quad (C.16)$$

$$\sigma_{xy} = 0 \quad (C.17)$$

e as expressões da pressão, tensão total vertical e dos deslocamentos são dadas por,

$$p(x, t) = \frac{2FB(1 + \nu^u)}{3L} \sum_{j=0}^{\infty} \left\{ \frac{\sin(A_j)}{A_j - \sin(A_j)\cos(A_j)} \left( \cos\left(\frac{A_j x}{L}\right) - \cos(A_j) \right) \exp(-A_j^2 c t / L^2) \right\} \quad (C.18)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{yy}(x, t) = & -\frac{2F(\nu^u - \nu)}{L(1 - \nu)} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\sin(A_j)}{A_j - \sin(A_j)\cos(A_j)} \cos\left(\frac{A_j x}{L}\right) \exp(-A_j^2 c t / L^2) \\ & - \frac{F}{L} + \frac{2F}{L} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\sin(A_j)\cos(A_j)}{A_j - \sin(A_j)\cos(A_j)} \exp(-A_j^2 c t / L^2) \end{aligned} \quad (C.19)$$

$$\begin{aligned} u(x, t) = & \left[ \frac{F\nu}{2GL} - \frac{F\nu^u}{GL} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\sin(A_j)\cos(A_j)}{A_j - \sin(A_j)\cos(A_j)} \exp(-A_j^2 c t / L^2) \right] x \\ & + \frac{F}{G} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\cos(A_j)}{A_j - \sin(A_j)\cos(A_j)} \sin\left(\frac{A_j x}{L}\right) \exp(-A_j^2 c t / L^2) \end{aligned} \quad (C.20)$$

$$v(y, t) = \left[ \frac{F(1 - \nu^u)}{GL} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\sin(A_j) \cos(A_j)}{A_j - \sin(A_j) \cos(A_j)} \exp(-A_j^2 c t / L^2) - \frac{F(1 - \nu)}{2GL} \right] y \quad (\text{C.21})$$

onde  $A_j$  são as raízes da equação abaixo.

$$\tan(A_j) = \frac{1 - \nu}{\nu^u - \nu} A_j \quad (\text{C.22})$$